

若 $m < 0$, 则当 $0 < x < -\frac{1}{2m}$ 时, $f'(x) > 0$,

则 $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{2m})$ 上单调递增;

当 $-\frac{1}{2m} < x$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{2m}, +\infty)$ 上单调递减.

综上所述, 当 $m \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $m < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{2m})$ 上单调递增, 在 $(-\frac{1}{2m}, +\infty)$ 上单调递减.

(3) 因为对任意 $x > 0$, $f(x) \leq 0$ 恒成立, 所以 $m(x^2 + 2x) \leq -\ln x - x - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

即 $m \leq -\frac{\ln x + x + 1}{x^2 + 2x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

设 $F(x) = -\frac{\ln x + x + 1}{x^2 + 2x}$, 则 $F'(x) = \frac{(x+1)(x+2\ln x)}{(x^2+2x)^2}$.

设 $\varphi(x) = x + 2\ln x$, 则 $\varphi'(x) = 1 + \frac{2}{x} > 0$, 则 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $\varphi(1) = 1 > 0$, $\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + 2\ln \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2\ln 2 < 0$,

所以 $\exists x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $\varphi(x_0) = 0$, 即 $x_0 + 2\ln x_0 = 0$.

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $\varphi(x) < 0$,

则 $F'(x) < 0$;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $\varphi(x) > 0$,

则 $F'(x) > 0$.

所以 $F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $F(x)_{\min} = F(x_0) = -\frac{\ln x_0 + x_0 + 1}{x_0^2 + 2x_0} = -\frac{1}{2x_0}$.

因为 $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, 所以 $-\frac{1}{2x_0} \in (-1, -\frac{1}{2})$, 所以 $m \leq -1$,

故整数 m 的最大值为 -1 .

9. (1) 【解】当 $a = 0$ 时, $f(x) = \sin x - x \cos x$, $f'(x) = x \sin x$, 则 $f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 处的切线方程为 $y - 1 = \frac{\pi}{2}(x - \frac{\pi}{2})$, 即 $\frac{\pi}{2}x - y - \frac{\pi^2}{4} + 1 = 0$.

(2) 【解】 $f(x) = \sin x - x \cos x + ax$, 则 $f'(x) = x \sin x + a$, 且 $f(0) = 0$.

当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) = x \sin x + a > 0$ 在 $(0, \pi)$ 上恒成立, 所以 $f(x)$ 单调递增, 此时 $f(x) > f(0) = 0$ 恒成立.

当 $a < 0$ 时, $f'(0) = a < 0$,

当 $x \in (0, \pi)$ 时, $0 < \sin x \leq 1$, 所以 $f'(x) = x \sin x + a \leq x + a$, 则在 $(0, -a)$ 上, $f'(x) = x \sin x + a \leq x + a < 0$,

记 $I = (0, \pi) \cap (0, -a)$, 则当 $x \in I$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 此时 $f(x) < f(0) = 0$, 不符合题意.

故实数 a 的取值范围是 $[0, +\infty)$.

(3) 【证明】当 $a = -1$ 时, $f(x) = \sin x - x \cos x - x$,

令 $F(x) = \sin x - x$, 则 $F(0) = 0$, $F'(x) = \cos x - 1$,

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减,

所以在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上, $\sin x - x < 0$, 且

$x \cos x > 0$, 易得 $f(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上没有零点, 故

只需证明 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上有且只有一个零点.

令 $g(x) = f'(x) = x \sin x - 1$, $h(x) = g'(x) = \sin x + x \cos x$,

则在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上, $h'(x) = 2 \cos x - x \sin x < 0$ 恒成立, $h(x)$ 单调递减,

又因为 $h(\frac{\pi}{2}) = 1$, $h(\pi) = -\pi$,

所以存在 $x_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 使得 $h(x_1) = 0$, 在 $(\frac{\pi}{2}, x_1)$ 上, $h(x) > 0$, 在 (x_1, π) 上, $h(x) < 0$,

因此 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, x_1)$ 上单调递增, 在 (x_1, π) 上单调递减, $g(x_1) > g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$, $g(\pi) = -1$,

所以存在 $x_2 \in (x_1, \pi)$ 使得 $g(x_2) = 0$, 在 $(\frac{\pi}{2}, x_2)$ 上, $g(x) > 0$, 在 (x_2, π) 上, $g(x) < 0$,

故 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, x_2)$ 上单调递增, 在 (x_2, π) 上单调递减, 且 $f(\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$, $f(x_2) > f(\pi) = 0$,

所以存在唯一的 $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, x_2)$ 使得

$f(x_0) = 0$, 且 $f(x)$ 在 (x_2, π) 上没有零点.

综上所述, $a = -1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有且只有一个零点.

专题 11 导数中的指对同构问题

刷难关

1. 【解】(1) 显然 $x > 0$, 则 $\log_2 x - k \cdot 2^{kx} \geq 0 \Leftrightarrow x \log_2 x \geq kx \cdot 2^{kx} \Leftrightarrow (\log_2 x) \cdot 2^{\log_2 x} \geq kx \cdot 2^{kx}$, 同构函数为 $f(x) = x \cdot 2^x$.

(2) 显然 $x > 0$, 则 $e^{2\lambda x} - \frac{1}{\lambda} \ln \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow$

$e^{2\lambda x} \geq \frac{1}{2\lambda} \ln x \Leftrightarrow 2\lambda x e^{2\lambda x} \geq x \ln x \Leftrightarrow 2\lambda x e^{2\lambda x} \geq (\ln x) e^{\ln x}$, 同构函数为 $g(x) = x e^x$.

(3) 显然 $x > 0$, 则 $x^2 \ln x - m e^{\frac{m}{x}} \geq 0 \Leftrightarrow x \ln x \geq \frac{m}{x} e^{\frac{m}{x}} \Leftrightarrow \ln x + \ln(\ln x) \geq \frac{m}{x} + \ln \frac{m}{x}$, 同构函数为 $h(x) = x + \ln x$.

(4) 显然 $x > 0$, 则 $a(e^{\alpha x} + 1) \geq 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) \ln x \Leftrightarrow a x e^{\alpha x} + a x \geq 2x^2 \ln x + 2 \ln x = x^2 \ln x^2 + \ln x^2 \Leftrightarrow a x \cdot e^{\alpha x} + a x \geq \ln x^2 \cdot$

$e^{\ln x^2} + \ln x^2$, 同构函数为 $u(x) = x e^x + x$.

(5) 显然 $x > 1$, $a \ln(x-1) + 2(x-1) \geq a x + 2e^x \Leftrightarrow a \ln(x-1) + 2(x-1) \geq a \ln e^x + 2e^x$, 同构函数为 $v(x) = a \ln x + 2x$.

(6) $x > 1$, $x + a \ln x + e^{-x} \geq x^a \Leftrightarrow x + e^{-x} \geq x^a - \ln x^a \Leftrightarrow e^{-x} - \ln e^{-x} \geq x^a - \ln x^a$, 同构函数为 $r(x) = x - \ln x$.

归纳总结 指对同构的常用形式

(1) 积型: $a e^a \leq b \ln b (b > 0)$

① 构造形式为 $a e^a \leq (\ln b) e^{\ln b}$, 构造函数 $f(x) = x e^x$;

② 构造形式为 $e^a \ln e^a \leq b \ln b$, 构造函数 $f(x) = x \ln x$;

③ 当 $a > 0, b > 1$ 时, 构造形式为 $a + \ln a \leq \ln b + \ln(\ln b)$, 构造函数 $f(x) = x + \ln x$.

(2) 商型: $\frac{e^a}{a} \leq \frac{b}{\ln b} (a \neq 0, b > 0 \text{ 且 } b \neq 1)$

① 构造形式为 $\frac{e^a}{a} \leq \frac{e^{\ln b}}{\ln b}$, 构造函数

$f(x) = \frac{e^x}{x}$;

② 构造形式为 $\frac{e^a}{\ln e^a} \leq \frac{b}{\ln b}$, 构造函数

$f(x) = \frac{x}{\ln x}$;

③ 当 $a > 0, b > 1$ 时, 构造形式为 $a - \ln a \leq \ln b - \ln(\ln b)$, 构造函数 $f(x) = x - \ln x$.

2. D 【解析】因为 $a e^{\alpha-3} = 1$, 所以 $a e^{\alpha} = e^3$, 所以 $\alpha + \ln \alpha = 3$.

因为 $\beta(\ln \beta - 1) = e^4$, 当 $0 < \beta \leq e$ 时, 显然等式不成立, 所以 $\beta > e$,

所以 $\ln \beta + \ln(\ln \beta - 1) = 4$.

观察 $\begin{cases} \alpha + \ln \alpha - 3 = 0, \\ (\ln \beta - 1) + \ln(\ln \beta - 1) - 3 = 0, \end{cases}$

→ 敲黑板: 转化为相同结构的式子, 为构造函数做准备

可知 α 与 $\ln \beta - 1$ 是关于 x 的方程 $x + \ln x - 3 = 0$ 的两根.

构造函数 $f(x) = x + \ln x - 3$, 该函数的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$, 则该函数为增函数.
因为 $f(\alpha) = f(\ln \beta - 1) = 0$, 所以 $\alpha = \ln \beta - 1$, 又 $\alpha + \ln \alpha - 3 = 0$, 所以 $\ln \beta - 1 + \ln \alpha - 3 = 0$, 即 $\ln(\alpha\beta) = 4$, 解得 $\alpha\beta = e^4$. 故选 D.

3.0 【解析】由方程 $e^x + (1-a)x = \ln a + \ln x$, 变形可得 $e^x + x = ax + \ln a + \ln x = e^{\ln(ax)} + \ln(ax)$.
令 $f(x) = e^x + x$, 则 $f'(x) = e^x + 1 > 0$, 所以 $f(x)$ 为增函数.
因为 $f(x) = f(\ln(ax))$, 所以 $x = \ln(ax)$, 即 $ax = e^x$.
由实数 x_0 是关于 x 的方程 $e^x + (1-a)x = \ln a + \ln x$ 的解, 可得 $ax_0 = e^{x_0}$, 所以 $e^{x_0} - ax_0 = 0$.

4.0 【解析】由题意可得 $x_0 e^{x_0} + \frac{1}{x_0} \ln x_0 = 0$, 且 $x_0 > 0$,
即 $x_0 \cdot e^{x_0} = -\frac{1}{x_0} \cdot \ln x_0 = \frac{1}{x_0} \cdot \ln \frac{1}{x_0}$,
由 $x_0 > 0$, 得 $x_0 \cdot e^{x_0} > 0$, 故 $\ln \frac{1}{x_0} \cdot e^{\ln \frac{1}{x_0}} > 0$, 又 $e^{\ln \frac{1}{x_0}} > 0$, 则 $\ln \frac{1}{x_0} > 0$.

令 $f(x) = xe^x (x > 0)$, 则 $f(x_0) = f\left(\ln \frac{1}{x_0}\right)$,
 $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,
故 $x_0 = \ln \frac{1}{x_0}$, 即 $x_0 = -\ln x_0$, 则 $x_0 + \ln x_0 = 0$.

归纳总结 指数、对数同构的五个常见变形

已知 $x > 0$.
① $xe^x = e^{x+\ln x}$, ② $x + \ln x = \ln(xe^x)$,

③ $\frac{e^x}{x} = e^{x-\ln x}$, ④ $x - \ln x = \ln \frac{e^x}{x}$,

⑤ $\frac{x}{e^x} = e^{\ln x - x}$.

拓展: $x^2 e^x = e^{x+2\ln x}$, $x + 2\ln x = \ln(x^2 e^x)$, $\frac{e^x}{x^2} = e^{x-2\ln x}$.

5.B 【解析】由题意可知 $e^{\ln a} + 2\ln a = e^b + 2b$,
设 $f(x) = e^x + 2x$, 易知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.
又 $f(\ln a) = f(b)$, 所以 $\ln a = b$, 则 $ab = a \ln a$.
设 $g(x) = x \ln x$, 则 $g'(x) = \ln x + 1$, 令 $g'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{e}$.
当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $g'(x) > 0$.

因此 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递增,
故 $g(x) \geq g\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$,
因此 $a \ln a \geq -\frac{1}{e}$, 故选 B.

多种解法 由题意可知 $a + 2\ln a = e^b + 2\ln e^b$,
设 $f(x) = x + 2\ln x$, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.
又 $f(a) = f(e^b)$, 所以 $a = e^b$, 则 $ab = be^b$.
设 $g(x) = xe^x$, 则 $g'(x) = (x+1)e^x$, 令 $g'(x) = 0$ 得 $x = -1$.
当 $x < -1$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x > -1$ 时, $g'(x) > 0$.
因此 $g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增,
故 $g(x) \geq g(-1) = -\frac{1}{e}$,
因此 $be^b \geq -\frac{1}{e}$. 故选 B.

6.C 【解析】由 $y \ln(3xy) = e^{3x}$, 得 $3xy \cdot \ln(3xy) = 3xe^{3x}$, 故 $\ln(3xy) \cdot e^{\ln(3xy)} = 3xe^{3x}$.
由题意得, $3x > 0$, $3xy > 0$, 由 $e^{3x} > 0$, $e^{\ln(3xy)} > 0$, $\ln(3xy) \cdot e^{\ln(3xy)} = 3xe^{3x}$, 得 $\ln(3xy) > 0$.
设 $f(t) = te^t, t > 0$, 则 $f'(t) = (t+1)e^t > 0$, $\therefore f(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.
 $\therefore f(\ln(3xy)) = f(3x)$, $\therefore \ln(3xy) = 3x$, $\therefore 3xy = e^{3x}$, 即 $y = \frac{e^{3x}}{3x}, x > 0$,
 $\therefore y' = \frac{(3x-1)e^{3x}}{3x^2}$,
令 $y' = \frac{(3x-1)e^{3x}}{3x^2} = 0$, 得 $x = \frac{1}{3}$,
当 $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ 时, $y' < 0$, $y = \frac{e^{3x}}{3x}$ 在 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ 上单调递减,
当 $x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ 时, $y' > 0$, $y = \frac{e^{3x}}{3x}$ 在 $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ 上单调递增,
 $\therefore$ 当 $x = \frac{1}{3}$ 时, y 取极小值也是最小值, 最小值为 e . 故选 C.

7.D 【解析】设 $f(x) = x \ln x (x \geq 1)$, 则 $f'(x) = 1 + \ln x \geq 1 > 0$, 故 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增.
 $\therefore ae^{ax} \geq \ln x$ 对任意 $x \geq 1$ 恒成立, 可等价变形为 $axe^{ax} \geq x \ln x$,
又 $\ln x \geq 0$, $\therefore axe^{ax} \geq x \ln x \geq 0$,
 $\therefore ax > 0$, $\therefore e^{ax} > 1$,
 $\therefore f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,
 $\therefore$ 由 $axe^{ax} \geq x \ln x$ 可得 $f(e^{ax}) \geq f(x)$,
可得 $e^{ax} \geq x$, 两边取自然对数得 $ax \geq \ln x$, 即 $a \geq \frac{\ln x}{x}$ 对任意 $x \geq 1$ 恒成立.

设 $g(x) = \frac{\ln x}{x} (x \geq 1)$, 则 $g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,
令 $g'(x) > 0$ 得 $1 \leq x < e$, 令 $g'(x) < 0$ 得 $x > e$,
 $\therefore g(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,
 $\therefore g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e}$.
 $\therefore a \geq \frac{\ln x}{x}$ 对任意 $x \geq 1$ 恒成立,
 $\therefore a \geq g(x)_{\max} = \frac{1}{e}$, 即实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$. 故选 D.

规律方法 解答本类不等式恒成立问题的关键是构造相应的函数, 利用导数说明函数的单调性, 结合函数的单调性比较函数值的大小.

8.A

思路导引 将不等式变形为 $e^{ax} + ax > e^{3\ln x} + 3\ln x$, 构造函数 $g(x) = e^x + x$, 求导判断其单调性, 进而将问题转化成 $ax > 3\ln x$, 分离参数, 构造函数 $h(x) = \frac{3\ln x}{x}$, 利用导数得到 $h(x)$ 的最大值, 从而得到实数 a 的取值范围.

【解析】 $f(x) > x^3 - ax$ 等价于 $e^{ax} + ax > x^3 + 3\ln x = e^{3\ln x} + 3\ln x$.
令函数 $g(x) = e^x + x$, 则 $g'(x) = e^x + 1 > 0$, 故 $g(x)$ 是增函数.
所以 $e^{ax} + ax > e^{3\ln x} + 3\ln x$ 等价于 $g(ax) > g(3\ln x)$,
故 $ax > 3\ln x (x > 0)$, 即 $a > \frac{3\ln x}{x}$.
令函数 $h(x) = \frac{3\ln x}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{3-3\ln x}{x^2}$. 当 $x \in (0, e)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, 所以 $h(x)_{\max} = h(e) = \frac{3}{e}$, 故 $a > \frac{3}{e}$, 即实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{3}{e}, +\infty\right)$.

9.D 【解析】由题可得 $a > 0$, 则由 $3\ln \frac{3x}{a} \leq ae^x$, 可得 $3\ln(3x) - 3\ln a \leq ae^x = e^{\ln a} \cdot e^x = e^{x+\ln a}$,
即 $3\ln(3x) \leq e^{x+\ln a} + 3\ln a$, 则 $3\ln(3x) + 3x \leq e^{x+\ln a} + 3\ln a + 3x$,
即 $e^{\ln(3x)} + 3\ln(3x) \leq e^{x+\ln a} + 3(x + \ln a)$,
令 $f(x) = e^x + 3x$, 则有 $f(\ln(3x)) \leq f(x + \ln a)$ 恒成立,
易知 $f(x) = e^x + 3x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 故 $\ln(3x) \leq x + \ln a$,
则 $\ln a \geq \ln(3x) - x$, 令 $g(x) = \ln(3x) - x$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$,
当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in$

$(1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$,
故 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在
 $(1, +\infty)$ 上单调递减,
故 $g(x) \leq g(1) = \ln 3 - 1 = \ln \frac{3}{e}$, 即
 $\ln a \geq \ln \frac{3}{e}$, 即 $a \geq \frac{3}{e}$, 则实数 a 的取
值范围是 $\left[\frac{3}{e}, +\infty\right)$. 故选 D.

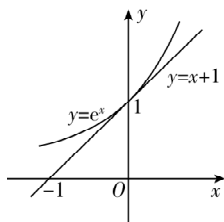
10.1

思路导引 由已知不等式变形可得
 $\ln(mx+1) - mx > \ln[(e^x-1)+1] - (e^x-1)$, 构造函数 $f(x) = \ln(x+1) - x$ ($x > 0$), 则不等式转化为 $f(mx) > f(e^x-1)$, 结合函数 $f(x)$ 的单调性进而转化
为 $mx < e^x - 1$, 结合导数的几何意义
及不等式恒成立与最值关系的转化
即可求解.

【解析】 由 $\ln(mx+1) - mx > \ln(e^x-1) - (e^x-1)$ 可得
 $\ln(mx+1) - mx > x + 1 - e^x$,
所以 $\ln(mx+1) - mx > \ln[(e^x-1)+1] - (e^x-1)$,
因为 $m > 0, x > 0$, 所以 $mx > 0, e^x - 1 > 0$,
设 $f(x) = \ln(x+1) - x$ ($x > 0$),
则 $\ln(mx+1) - mx > \ln[(e^x-1)+1] - (e^x-1)$ 即为 $f(mx) > f(e^x-1)$.
因为 $f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} < 0$, 所以函
数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,
从而 $f(mx) > f(e^x-1)$ 等价于 $mx < e^x - 1$, 即 $mx+1 < e^x$.

巧思: 也可分离参数得到 $m < \frac{e^x-1}{x}$, 再构造函数分析, 得参数范围

因为曲线 $y = e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线
方程为 $y = x + 1$,



所以当且仅当 $0 < m \leq 1$ 时, $mx+1 < e^x$
在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以正实数 m

敲黑板: 根据导数的几何意义结
合图象得到

的最大值为 1.

- 11. 【解】** (1) 当 $a = e$ 时, $f(x) = e^x - \ln x + 1$,
 $\therefore f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $\therefore f'(1) = e - 1$.
 $\therefore f(1) = e + 1$, $\therefore$ 曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - e - 1 = (e - 1)(x - 1)$, 即 $y = (e - 1)x + 2$,
 $\therefore$ 切线与两坐标轴的交点坐标分别
为 $(0, 2)$, $\left(\frac{-2}{e-1}, 0\right)$, $\therefore$ 所求三角形的
面积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times \left|\frac{-2}{e-1}\right| = \frac{2}{e-1}$.
(2) $\because f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$,
 $\therefore f'(x) = ae^{x-1} - \frac{1}{x}$, 且 $a > 0$.

设 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = ae^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0$,
 $\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 即
 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.
当 $a = 1$ 时, $f'(1) = 0$, $\therefore$ 当 $0 < x < 1$ 时,
 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x > 1$ 时,
 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, $\therefore f(x)_{\min} = f(1) = 1$, 此时 $f(x) \geq 1$ 成立.

当 $a > 1$ 时, $\frac{1}{a} < 1$, $\therefore e^{\frac{1}{a}-1} < 1$,
 $\therefore f'\left(\frac{1}{a}\right) f'(1) = a(e^{\frac{1}{a}-1} - 1)(a - 1) < 0$,

$\therefore$ 存在唯一 $x_0 \in \left(\frac{1}{a}, 1\right)$, 使得
 $f'(x_0) = ae^{x_0-1} - \frac{1}{x_0} = 0$, $\therefore ae^{x_0-1} = \frac{1}{x_0}$,
 $\therefore \ln a + x_0 - 1 = -\ln x_0$, $\therefore$ 当 $x \in (0, x_0)$ 时,
 $f'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时,
 $f'(x) > 0$,

因此 $f(x)_{\min} = f(x_0) = ae^{x_0-1} - \ln x_0 + \ln a = \frac{1}{x_0} + \ln a + x_0 - 1 + \ln a > 2 \ln a - 1 + 2\sqrt{\frac{1}{x_0} \cdot x_0} = 2 \ln a + 1 > 1$,
 $\therefore f(x) > 1$, 此时 $f(x) \geq 1$ 恒成立.
当 $0 < a < 1$ 时, $f(1) = a + \ln a < a < 1$,
 $\therefore f(1) < 1$, 不符合题意.
综上所述, 实数 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

多种解法一 (2) (同构) 由 $f(x) \geq 1$ 得 $ae^{x-1} - \ln x + \ln a \geq 1$, 即 $e^{\ln a + x - 1} + \ln a + x - 1 \geq \ln x + x$, 而 $\ln x + x = e^{\ln x} + \ln x$, $\therefore e^{\ln a + x - 1} + \ln a + x - 1 \geq e^{\ln x} + \ln x$.
令 $h(m) = e^m + m$, 则 $h'(m) = e^m + 1 > 0$, $\therefore h(m)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.
由 $e^{\ln a + x - 1} + \ln a + x - 1 \geq e^{\ln x} + \ln x$, 可知 $h(\ln a + x - 1) \geq h(\ln x)$, $\therefore \ln a + x - 1 \geq \ln x$, $\therefore \ln a \geq (\ln x - x + 1)_{\max}$.
令 $F(x) = \ln x - x + 1$, 则 $F'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.
 $\therefore$ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减,
 $\therefore F(x)_{\max} = F(1) = 0$, 则 $\ln a \geq 0$, 即 $a \geq 1$. 因此实数 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

多种解法二 (2) (换元同构) 由题
意知 $a > 0, x > 0$, 令 $ae^{x-1} = t$, 则 $\ln a + x - 1 = \ln t$, $\therefore \ln a = \ln t - x + 1$.
于是 $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a = t - \ln x + \ln t - x + 1$.
 $f(x) \geq 1$, 即 $t - \ln x + \ln t - x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow t + \ln t \geq x + \ln x$, 而 $y = x + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 故 $t \geq x$, 即
 $ae^{x-1} \geq x$, 则 $a \geq \frac{x}{e^{x-1}}$. 令 $h(x) = \frac{x}{e^{x-1}}$,
则 $h'(x) = \frac{e^{x-1} - xe^{x-1}}{e^{2x-2}} = \frac{e^{x-1}(1-x)}{e^{2x-2}} = \frac{1-x}{e^{x-1}}$.

当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增;
当 $x > 1$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,
 $\therefore$ 当 $x = 1$ 时, $h(x) = \frac{x}{e^{x-1}}$ 取得最大值
 $h(1) = 1$, $\therefore a \geq 1$.
因此实数 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

- 12. B 【解析】** 由题意可得 $\frac{1}{x_1} - \ln x_1 = e^{-x_2} - x_2$,
整理可得 $\frac{1}{x_1} - \ln x_1 = \frac{1}{e^{x_2}} - \ln e^{x_2}$, 即
 $f(x_1) = f(e^{x_2})$,
又因为 $y = \frac{1}{x}, y = -\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上
单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单
调递减,
所以 $x_1 = e^{x_2}$, 则 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{x_2}}{x_2}$.
设 $h(x) = \frac{e^x}{x}, x > 0$, 可得
 $h'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$,
当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x > 1$ 时,
 $h'(x) > 0$,
可知 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在
 $(1, +\infty)$ 上单调递增,
则 $h(x) \geq h(1) = e$, 所以 $\frac{x_1}{x_2}$ 的最小值
为 e . 故选 B.

- 13. 【解】** (1) 当 $a = e$ 时, $f(x) = e^x - \log_a x = e^x - \ln x$ ($x > 0$),
设曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0, 1)$ 的切线方程
为 $l: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ($x_0 > 0$).
 $f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0, f'(x_0) = e^{x_0} - \frac{1}{x_0}$,
代入切线方程得 $y = \left(e^{x_0} - \frac{1}{x_0}\right)(x - x_0) + e^{x_0} - \ln x_0 = \left(e^{x_0} - \frac{1}{x_0}\right)x + e^{x_0}(1 - x_0) - \ln x_0 + 1$,
因为直线 l 过点 $(0, 1)$, 所以 $e^{x_0}(1 - x_0) - \ln x_0 + 1 = 1$, 即 $e^{x_0}(1 - x_0) - \ln x_0 = 0$ ①,

敲黑板: 方程的解不易得到, 可利
用函数与方程思想求解

令 $g(x) = e^x(1-x) - \ln x$ ($x > 0$), 则
 $g'(x) = -xe^x - \frac{1}{x} < 0$,
所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 又
 $g(1) = 0$, 所以 $g(x)$ 有唯一零点 1, 即
方程①的根为 $x_0 = 1$,

把 $x_0 = 1$ 代入 $y = \left(e^{x_0} - \frac{1}{x_0}\right)x + e^{x_0}(1 - x_0) - \ln x_0 + 1$ 得, $y = (e - 1) \cdot x + 1$,
故曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0, 1)$ 的切线方
程为 $(e - 1)x - y + 1 = 0$.
(2) 因为 $f(x)$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 上连
续, 又 $f(1) = a > 0$,
所以要使 $f(x)$ 无零点, 需使 $f(x) > 0$

在其定义域上恒成立.

于是原问题转化为求使 $f(x) = a^x - \log_a x > 0$ 恒成立的 a 的取值范围.

当 $0 < a < 1$ 时, $f(a) = a^a - \log_a a = a^a - 1 < 0$, 不合题意.

当 $a > 1$ 时, $a^x - \log_a x > 0 \Leftrightarrow a^x > \log_a x \Leftrightarrow$

$$a^x > \frac{\ln x}{\ln a} \Leftrightarrow a^x \ln a > \ln x \Leftrightarrow a^x \ln a >$$

$$x \ln x \Leftrightarrow a^x \ln a^x > x \ln x (*),$$

当 $0 < x < 1$ 时, $a^x \ln a^x > 0 > x \ln x$ 恒成立.

下面讨论 $x > 1$ 的情况.

令 $h(x) = xe^x (x > 0)$, 则 $h'(x) = (x+1) \cdot e^x > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又由 $(*)$ 式得 $h(\ln a^x) > h(x \ln a)$, 所以 $\ln a^x = x \ln a > \ln x (x >$

$1)$, 即 $\ln a > \frac{\ln x}{x} (x > 1)$ 恒成立.

$$\text{令 } \varphi(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 1), \text{ 则 } \varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \text{ 令 } \varphi'(x) = 0 \text{ 得 } x = e.$$

当 $1 < x < e$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调递增; 当 $x > e$ 时, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 单调递减,

所以当 $x = e$ 时 $\varphi(x)$ 取得最大值,

$$\varphi(x)_{\max} = \varphi(e) = \frac{1}{e}, \text{ 所以 } \ln a > \frac{1}{e},$$

即 $a > e^{\frac{1}{e}}$.

综上所述, a 的取值范围为 $(e^{\frac{1}{e}}, +\infty)$.

14. (1) 【解】 $f(x) = e^x - ax$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

而 $f'(x) = e^x - a$,

若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 无最小值, 故 $a > 0$.

则当 $x < \ln a$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减,

当 $x > \ln a$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{故 } f(x)_{\min} = f(\ln a) = a - a \ln a.$$

$g(x) = ax - \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{而 } g'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}, a > 0.$$

当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $g'(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在

$(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减,

当 $x > \frac{1}{a}$ 时, $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在

$(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{故 } g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - \ln \frac{1}{a}.$$

因为 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值,

所以 $1 - \ln \frac{1}{a} = a - a \ln a$, 整理得 $\frac{a-1}{1+a} = \ln a$, 其中 $a > 0$.

$$\text{设 } p(a) = \frac{a-1}{1+a} - \ln a, a > 0, \text{ 则 } p'(a) =$$

$$\frac{2}{(1+a)^2} - \frac{1}{a} = \frac{-a^2-1}{a(1+a)^2} < 0,$$

故 $p(a)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的减函数, 而 $p(1) = 0$, 故 $p(a) = 0$ 的唯一解为 $a =$

1 , 即 $\frac{a-1}{1+a} = \ln a$ 的解为 $a = 1$. 综上, $a = 1$.

(2) 【证明】由 (1) 可得 $f(x) = e^x - x$ 和 $g(x) = x - \ln x$ 的最小值为 $1 - \ln 1 = 1$.

当 $b < 1$ 时, $f(x)_{\min} = g(x)_{\min} = 1 > b$, 显然直线 $y = b$ 与两条曲线没有交点, 不符合题意.

当 $b = 1$ 时, $f(x)_{\min} = g(x)_{\min} = 1 = b$, 此时直线 $y = b$ 与两条曲线共有两个交点, 不符合题意,

故若存在直线 $y = b$, 其与两条曲线共有三个不同的交点, 则 $b > 1$.

当 $b > 1$ 时, 分别考虑方程 $e^x - x = b$, $x - \ln x = b$ 的解的个数.

设 $S(x) = e^x - x - b$, 则 $S'(x) = e^x - 1$, 当 $x < 0$ 时, $S'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $S'(x) > 0$,

故 $S(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $S(x)_{\min} = S(0) = 1 - b < 0$,

$$\text{而 } S(-b) = e^{-b} > 0, S(b) = e^b - 2b,$$

设 $u(b) = e^b - 2b, b > 1$, 则 $u'(b) = e^b - 2 > 0$, 故 $u(b)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 当 $b \rightarrow 1$ 时, $u(b) \rightarrow e - 2$, 又 $e - 2 > 0$, 故 $u(b) > 0$,

故 $S(b) > 0$, 故 $S(x) = e^x - x - b$ 有两个不同的零点, 即方程 $e^x - x = b$ 的解的个数为 2.

$$\text{设 } T(x) = x - \ln x - b, \text{ 则 } T'(x) = \frac{x-1}{x},$$

当 $0 < x < 1$ 时, $T'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $T'(x) > 0$, 故 $T(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $T(x)_{\min} = T(1) = 1 - b < 0$, 而

$$T(e^{-b}) = e^{-b} > 0, T(e^b) = e^b - 2b > 0,$$

故 $T(x) = x - \ln x - b$ 有两个不同的零点, 即方程 $x - \ln x = b$ 的解的个数为 2.

$$\text{设 } h(x) = e^x + \ln x - 2x, x > 0,$$

悟: 方程 $e^x - x = b, x - \ln x = b$ 各有一个解, 结合题意知方程 $e^x - x = x - \ln x$, 即 $e^x + \ln x - 2x = 0$ 有且只有一个解, 即证 $h(x) = e^x + \ln x - 2x$ 有且只有一个零点.

$$\text{则 } h'(x) = e^x + \frac{1}{x} - 2,$$

设 $s(x) = e^x - x - 1, x > 0$, 则 $s'(x) = e^x - 1 > 0$, 故 $s(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又当 $x \rightarrow 0$ 时, $s(x) \rightarrow 0$, 故 $s(x) > 0$, 即 $e^x > x + 1$,

$$\text{所以 } h'(x) > x + 1 + \frac{1}{x} - 2 = x + \frac{1}{x} - 1 \geq$$

$$2 - 1 > 0, \text{ 所以 } h(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增, 而 } h(1) = e - 2 > 0, h\left(\frac{1}{e^3}\right) = e^{\frac{1}{e^3}} -$$

$$3 - \frac{2}{e^3} < e - 3 - \frac{2}{e^3} < 0,$$

故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有且只有一个零点 x_0 , 且 $\frac{1}{e^3} < x_0 < 1$,

所以当 $0 < x < x_0$ 时, $h(x) < 0$, 即 $e^x - x < x - \ln x$, 即 $f(x) < g(x)$,

当 $x > x_0$ 时, $h(x) > 0$, 即 $e^x - x > x - \ln x$, 即 $f(x) > g(x)$,

因此若存在直线 $y = b$ 与曲线 $y = f(x), y = g(x)$ 有三个不同的交点, 故 $b = f(x_0) = g(x_0) > 1$,

此时方程 $e^x - x = b$ 有两个不同的根 $x_1, x_0 (x_1 < 0 < x_0)$,

方程 $x - \ln x = b$ 有两个不同的根 $x_0, x_2 (0 < x_0 < 1 < x_2)$,

$$\text{故 } e^{x_1} - x_1 = b, e^{x_0} - x_0 = b, x_2 - \ln x_2 - b = 0, x_0 - \ln x_0 - b = 0,$$

$$\text{所以 } x_2 - b = \ln x_2, \text{ 即 } e^{x_2-b} = x_2, \text{ 即 } e^{x_2-b} - (x_2-b) - b = 0,$$

故 $x_2 - b$ 为方程 $e^x - x = b$ 的解, 同理可知 $x_0 - b$ 也为方程 $e^x - x = b$ 的解,

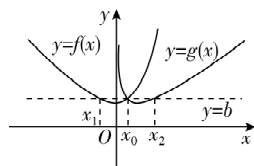
又 $e^{x_1} - x_1 = b$ 可化为 $e^{x_1} = x_1 + b$, 即 $x_1 - \ln(x_1 + b) = 0$, 即 $(x_1 + b) - \ln(x_1 + b) - b = 0$,

故 $x_1 + b$ 为方程 $x - \ln x = b$ 的解, 同理可知 $x_0 + b$ 也为方程 $x - \ln x = b$ 的解,

所以 $\{x_1, x_0\} = \{x_0 - b, x_2 - b\}$, 而 $b > 1$,

$$\text{故 } \begin{cases} x_0 = x_2 - b, \\ x_1 = x_0 - b, \end{cases} \text{ 即 } x_1 + x_2 = 2x_0. \text{ 故直线}$$

$y = b$ 与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.



多种解法 (2) 由 (1) 知, $f(x) = e^x -$

$x, g(x) = x - \ln x$, 且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(x)_{\min} = g(x)_{\min} = 1$.

① 当 $b < 1$ 时, $f(x)_{\min} = g(x)_{\min} = 1 > b$, 显然直线 $y = b$ 与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 没有交点, 不符合题意.

② 当 $b = 1$ 时, $f(x)_{\min} = g(x)_{\min} = 1 = b$, 故直线 $y = b$ 与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有两个交点, 不符合题意.

③ 当 $b > 1$ 时, 首先证明直线 $y = b$ 与曲线 $y = f(x)$ 有两个交点, 即证明 $F(x) = f(x) - b$ 有两个零点.

$$F'(x) = f'(x) = e^x - 1,$$

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又因为 $F(-b) = e^{-b} > 0, F(0) = 1 - b < 0, F(b) = e^b - 2b > 0$,

悟: 令 $t(b) = e^b - 2b$, 则 $t'(b) = e^b - 2 > 0$, 又当 $b \rightarrow 1$ 时, $t(b) \rightarrow e - 2 > 0$, 所以 $t(b) > 0$.

所以 $F(x) = f(x) - b$ 在 $(-\infty, 0)$ 上存在且只存在一个零点, 设为 x_1 ,

在 $(0, +\infty)$ 上存在且只存在一个零点, 设为 x_2 .

其次证明直线 $y=b$ 与曲线 $y=g(x)$ 有两个交点,即证明 $G(x)=g(x)-b$ 有两个零点. $G'(x)=g'(x)=1-\frac{1}{x}$, 所以 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,又因为 $G(e^{-b})=e^{-b}>0$, $G(1)=1-b<0$, $G(2b)=b-\ln 2b>0$,

→ **点悟:** 令 $\mu(b)=b-\ln 2b$, 则 $\mu'(b)=1-\frac{1}{b}>0$, 又当 $b \rightarrow 1$ 时, $\mu(b) \rightarrow 1-\ln 2>0$, 所以 $\mu(b)>0$

所以 $G(x)=g(x)-b$ 在 $(0,1)$ 上存在且只存在一个零点, 设为 x_3 , 在 $(1,+\infty)$ 上存在且只存在一个零点, 设为 x_4 .

再证明存在 b , 使得 $x_2=x_3$. 因为 $F(x_2)=G(x_3)=0$, 所以 $b=e^{x_2}-x_2=x_3-\ln x_3$, 若 $x_2=x_3$, 则 $e^{x_2}-x_2=x_2-\ln x_2$, 即 $e^{x_2}-2x_2+\ln x_2=0$,

所以只需证明 $e^x-2x+\ln x=0$ 在 $(0,1)$ 上有解即可, 即 $\varphi(x)=e^x-2x+\ln x$ 在 $(0,1)$ 上有零点.

因为 $\varphi\left(\frac{1}{e^3}\right)=e^{\frac{1}{e^3}}-\frac{2}{e^3}-3<0$, $\varphi(1)=e-2>0$,

所以 $\varphi(x)=e^x-2x+\ln x$ 在 $(0,1)$ 上存在零点, 取一零点为 x_0 , 令 $x_2=x_3=x_0$ 即可,

此时取 $b=e^{x_0}-x_0$, 则此时存在直线 $y=b$, 其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点.

最后证明 $x_1+x_4=2x_0$, 即从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

因为 $F(x_1)=F(x_2)=F(x_0)=0=G(x_3)=G(x_0)=G(x_4)$,

所以 $F(x_1)=G(x_0)=F(\ln x_0)$, 又因为 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, $x_1<0, 0<x_0<1$, 即 $\ln x_0<0$, 所以

$x_1=\ln x_0$,

同理, 因为 $F(x_0)=G(e^{x_0})=G(x_4)$, 又因为 $G(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增, $x_0>0$, 即 $e^{x_0}>1, x_4>1$, 所以 $x_4=e^{x_0}$.

又因为 $e^{x_0}-2x_0+\ln x_0=0$,

所以 $x_1+x_4=\ln x_0+e^{x_0}=2x_0$,

即直线 $y=b$ 与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

名师点拨 研究复杂函数零点间的关系时, 可以考虑先研究函数值间的关系, 再利用函数性质得到自变量(零点)间的关系. 本题中是多个函数的零点的关系, 考虑利用指对同构构造有相同外函数的复合函数, 从而统一函数去进一步研究.

专题 12 导数中的双变量问题

刷难关

1. C 【解析】不妨设 $x_2 > x_1$, 由 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 2(x_2+x_1)$ 可得 $f(x_2)-f(x_1) > 2x_2^2-2x_1^2$, 即 $f(x_2)-2x_2^2 > f(x_1)-2x_1^2$. 设 $g(x)=f(x)-2x^2$, 则 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 $g'(x)=3x^2-(2m+4)x+3 \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 故 $\Delta=(2m+4)^2-36 \leq 0$, 解得 $-5 \leq m \leq 1$, 即实数 m 的取值范围为 $[-5, 1]$. 故选 C.

归纳总结 此类问题一般是给出含有 $x_1, x_2, f(x_1), f(x_2)$ 的不等式, 若能通过变形, 把不等式两边转化为同源函数, 则可利用函数单调性定义构造单调函数, 再利用导数求解.

常见结论有: (1) 若对任意 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时恒有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$,

则 $y=f(x)$ 在 D 上单调递增;

(2) 若对任意 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时恒有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > k$, 则 $y=f(x)-kx$ 在 D 上单调递增;

(3) 若对任意 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时恒有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > \frac{k}{x_1 x_2}$, 则 $y=f(x)+\frac{k}{x}$ 在 D 上单调递增;

(4) 若对任意 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时恒有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > x_1+x_2$, 则 $y=f(x)-x^2$ 在 D 上单调递增.

2. 【解】 (1) $f'(x)=\frac{m+1}{x}+2mx=m$

$\frac{2mx^2+m+1}{x} (x>0)$,

① 当 $m \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

② 当 $-1 < m < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{-\frac{m+1}{2m}})$ 上单调递增, 在 $(\sqrt{-\frac{m+1}{2m}}, +\infty)$ 上单调递减;

③ 当 $m \leq -1$ 时, $f'(x) < 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 因为 $f(x)$ 在定义域内单调递减, 所以 $m \leq -1$.

不妨设 $x_1 > x_2$, 那么有 $f(x_1) < f(x_2)$, 于是不等式 $|f(x_1)-f(x_2)| > 4|x_1-x_2|$ 等价于 $f(x_2)-f(x_1) > 4(x_1-x_2)$, $f(x_2)+4x_2 > f(x_1)+4x_1$.

设 $g(x)=f(x)+4x=(m+1)\ln x+mx^2+4x$, 则 $g(x_2) > g(x_1)$, 即 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

故 $g'(x)=\frac{m+1}{x}+2mx+4 \leq 0$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 也即 $m \leq -\frac{4x+1}{2x^2+1}$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立.

令 $t=4x+1 (t>1)$, 则 $x=\frac{t-1}{4}$, 故 $-\frac{4x+1}{2x^2+1}=-\frac{t}{\frac{t^2-2t+9}{8}}=-\frac{8}{t+\frac{9}{t}-2} \geq$

$-\frac{8}{2\sqrt{t \cdot \frac{9}{t}}-2}=-2$,

当且仅当 $t=\frac{9}{t}$, 即 $t=3$ 时取等号, 则

$m \leq -2$,

所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -2]$.

3. 【解】 (1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}(1-x)^2$, 定义域为 $(0, +\infty)$,

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}-(1-x)$,

所以 $f'(1)=1$. 又 $f(1)=0$,

所以函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y=x-1$, 即 $x-y-1=0$.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-ax+\frac{1}{2}a^2$, $f'(x)=\frac{1}{x}+x-a=\frac{x^2-ax+1}{x}$.

由函数 $f(x)$ 在定义域上单调递增, 可得 $f'(x) \geq 0$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立,

即 $x^2-ax+1 \geq 0$, $a \leq x+\frac{1}{x}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立.

因为 $x+\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}=2$, 当且仅当 $x=1$ 时等号成立,

所以当 $a \leq 2$ 时, $f'(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立且不恒为 0, 即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$.

(3) 因为 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上存在两个极值点 x_1, x_2 ,

所以 $f'(x)=0$, 即 $x^2-ax+1=0$ 在 $(0, 2)$ 上有两个不等实数根 x_1, x_2 ,

则 $\begin{cases} 4-2a+1>0, \\ \Delta=a^2-4>0, \\ 0<\frac{a}{2}<2, \end{cases}$ 解得 $2<a<\frac{5}{2}$.

又 $x_1+x_2=a, x_1x_2=1$,

则有 $f(x_1)=\ln x_1+\frac{1}{2}(a-x_1)^2=\ln x_1+$

$$\frac{1}{2}x_2^2, f(x_2) = \ln x_2 + \frac{1}{2}(a-x_2)^2 = \ln x_2 + \frac{1}{2}x_1^2,$$

$$f(x_1) - f(x_2) = \ln \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} = \ln \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2^2 - x_1^2}{2x_1x_2} = \ln \frac{x_1}{x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} \right).$$

$$\text{令 } t = \frac{x_1}{x_2} (0 < t < 1), \text{ 则 } f(x_1) - f(x_2) =$$

$$h(t) = \ln t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2t},$$

$$\text{则 } h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2} = \frac{-t^2 + 2t - 1}{2t^2} = \frac{-(t-1)^2}{2t^2} < 0, \text{ 所以 } h(t) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上单调递减.}$$

$$\text{又 } a = x_1 + x_2 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1x_2}} = \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \in \left(2, \frac{5}{2} \right) \text{ ①, 及 } 0 < t < 1, \text{ 即 } 0 < \sqrt{t} < 1 \text{ ②,}$$

$$\text{联立①②解得 } \frac{1}{2} < \sqrt{t} < 1, \text{ 所以 } \frac{1}{4} < t < 1,$$

$$\text{且 } h(1) = 0, h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8} - 2\ln 2,$$

$$\text{所以 } |f(x_2) - f(x_1)| \text{ 的取值范围是 } \left(0, \frac{15}{8} - 2\ln 2 \right).$$

4. (1) 【解】当 $a = -1$ 时, $f(x) = e^x - e^{-x} - x$, 则 $f'(x) = e^x + e^{-x} - 1 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} - 1 = 1 > 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号, 故此时 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, +\infty)$, 无单调递减区间.

(2) (i) 【解】 $f'(x) = e^x + e^{-x} + a$, 因为 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 所以 $f'(x_1) = f'(x_2) = e^{x_1} + e^{-x_1} + a = e^{x_2} + e^{-x_2} + a = 0$.

令 $e^x = t > 0$, 则方程 $t + \frac{1}{t} + a = 0$ 有两个相异正根 t_1, t_2 .

注意到 $t + \frac{1}{t} + a = 0 \Rightarrow t^2 + at + 1 = 0$,

因此此方程有两个相异正根,

$$\text{所以 } \begin{cases} \Delta = a^2 - 4 > 0, \\ t_1 + t_2 = -a > 0, \\ t_1 t_2 = 1 > 0, \end{cases}$$

解得 $a < -2$, 故 a 的取值范围为 $(-\infty, -2)$.

(ii) 【证明】由 (i) 可得 $t_1 t_2 = e^{x_1+x_2} = 1 \Rightarrow$

$$x_2 = -x_1 \Rightarrow e^{x_1} = \frac{1}{e^{x_2}}, e^{x_2} = \frac{1}{e^{x_1}}.$$

不妨设 $t_1 < t_2$, 结合 $t_1 + t_2 > 0, t_1 t_2 = 1$, 可得 $e^{x_1} < 1 < e^{x_2} \Rightarrow x_1 < 0 < x_2$.

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{e^{x_1} - \frac{1}{e^{x_1}} - e^{x_2} + \frac{1}{e^{x_2}} + a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= a + \frac{2(e^{x_1} - e^{x_2})}{x_1 - x_2} = a + \frac{2(e^{x_2} - e^{x_1})}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

$$= a + \frac{2\left(e^{\frac{x_2}{x_1}} - \frac{1}{e^{\frac{x_2}{x_1}}}\right)}{\frac{x_2}{x_1} - \frac{1}{x_1}} = a + \frac{e^{\frac{x_2}{x_1}} - \frac{1}{e^{\frac{x_2}{x_1}}}}{\frac{x_2}{x_1} - \frac{1}{x_1}},$$

$$\text{则要证 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > a + 2, \text{ 即证 } \frac{e^{\frac{x_2}{x_1}} - \frac{1}{e^{\frac{x_2}{x_1}}}}{\frac{x_2}{x_1} - \frac{1}{x_1}} > 2,$$

即证 $e^{2x_2} - 2x_2 e^{x_2} - 1 > 0$, 其中 $x_2 > 0$.

令 $g(x) = e^{2x} - 2x e^x - 1, x \geq 0$, 则 $g'(x) = 2e^{2x} - 2e^x(x+1) = 2e^x(e^x - x - 1)$.

令 $h(x) = e^x - x - 1, x \geq 0$, 则 $h'(x) = e^x - 1 \geq 0$ 且不恒为 0,

则 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 得 $h(x) \geq h(0) = 0$.

则 $g'(x) = 2e^x(e^x - x - 1) \geq 0$ 且不恒为 0, 得 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

则当 $x_2 > 0$ 时, $g(x_2) = e^{2x_2} - 2x_2 e^{x_2} - 1 > g(0) = 0$, 不等式得证.

特别注意 此题第 (2) (ii) 中的问题和题型 1 很相似, 但是其中 x_1, x_2 不是两个任意的变量, 而是两个相关的变量, 所以不应该转化为函数单调性去研究, 而是应该消元去研究.

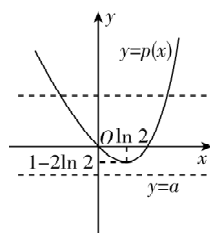
归纳总结 与极值点 x_1, x_2 有关的双变量问题, 一般是根据 x_1, x_2 是方程 $f'(x) = 0$ 的两个根, 确定 x_1, x_2 的关系, 通过消元转化为只含有 x_1 或 x_2 的关系式, 再构造函数解题, 有时也可以把所给条件转化为 x_1, x_2 的齐次式, 然后转化为关于 $\frac{x_2}{x_1}$ 的函数.

5. (1) 【解】由 $f(x) = 0$ 可得 $a = e^x - 2x - 1$, 令 $p(x) = e^x - 2x - 1$, 其中 $x \in \mathbf{R}$, 则函数 $f(x)$ 的零点个数等于直线 $y = a$ 与函数 $p(x) = e^x - 2x - 1$ 图象的公共点个数.

$p'(x) = e^x - 2$, 令 $p'(x) = 0$ 可得 $x = \ln 2, p'(x), p(x)$ 随 x 的变化情况列表如下:

x	$(-\infty, \ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2, +\infty)$
$p'(x)$	-	0	+
$p(x)$	单调递减	极小值 $1 - 2\ln 2$	单调递增

作出直线 $y = a$ 及函数 $y = p(x)$ 的大致图象如图所示, 则由图可知,



当 $a < 1 - 2\ln 2$ 时, 函数 $f(x)$ 无零点;

当 $a = 1 - 2\ln 2$ 时, 函数 $f(x)$ 只有一个零点;

当 $a > 1 - 2\ln 2$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个

零点.

(2) 【证明】因为 $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - x^2 - (a+1)x + 1$, 其中 $x \in \mathbf{R}$,

所以 $h'(x) = e^x - 2x - (a+1)$. 由已知可

$$\text{得 } \begin{cases} h'(x_1) = e^{x_1} - 2x_1 - (a+1) = 0, \\ h'(x_2) = e^{x_2} - 2x_2 - (a+1) = 0, \end{cases}$$

上述两个等式作差得 $e^{x_2} - e^{x_1} = 2(x_2 - x_1)$. 要证 $e^{x_2} - e^{x_1} < 4a + 2$, 即证 $x_2 - x_1 < 2a + 1$.

由 (1) 知 $p(0) = 0$, 设函数 $p(x)$ 的图象交 x 轴的正半轴于点 $(x_3, 0)$, 则 $x_3 > \ln 2$.

因为函数 $p(x)$ 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增, $p(1) = e - 3 < 0, p\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} - 4 > 0$,

$$\text{所以 } x_3 \in \left(1, \frac{3}{2} \right).$$

设函数 $p(x)$ 的图象在 $x = 0$ 处的切线交直线 $y = a$ 于点 $A(x'_1, a)$,

函数 $p(x)$ 的图象在 $x = x_3$ 处的切线交直线 $y = a$ 于点 $B(x'_2, a)$,

因为 $p'(0) = -1$, 所以函数 $p(x)$ 的图象在 $x = 0$ 处的切线方程为 $y = -x$.

$$\text{联立 } \begin{cases} y = a, \\ y = -x, \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} x = -a, \\ y = a, \end{cases} \text{ 即点 } A(-a, a), x'_1 = -a.$$

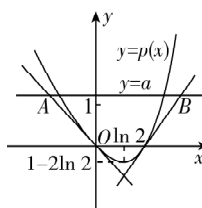
构造函数 $m(x) = p(x) + x = e^x - x - 1$, 其中 $x \in \mathbf{R}$, 则 $m'(x) = e^x - 1$,

当 $x < 0$ 时, $m'(x) < 0$, 此时函数 $m(x)$ 单调递减;

当 $x > 0$ 时, $m'(x) > 0$, 此时函数 $m(x)$ 单调递增, 所以 $m(x) \geq m(0) = 0$,

所以对任意的 $x \in \mathbf{R}, p(x) \geq -x$, 当且仅当 $x = 0$ 时等号成立.

由图可知 $-a < x_3 < 0$.



因为 $p(x_3) = e^{x_3} - 2x_3 - 1 = 0$, 所以 $e^{x_3} = 2x_3 + 1$, 函数 $p(x)$ 的图象在 $x = x_3$ 处的切线方程为 $y = (e^{x_3} - 2)(x - x_3)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = (e^{x_3} - 2)(x - x_3), \\ y = a, \end{cases} \text{ 解得 } x = \frac{a}{e^{x_3} - 2} + x_3,$$

$$x_3 = \frac{a}{2x_3 - 1} + x_3, \text{ 即点 } B\left(\frac{a}{2x_3 - 1} + x_3, a\right).$$

$$\text{因为 } \frac{a}{2x_3 - 1} + x_3 - (a + 1) = \frac{(x_3 - 1)(2x_3 - 1 - 2a)}{2x_3 - 1} < 0, \text{ 所以 } x'_2 =$$

$$\frac{a}{2x_3 - 1} + x_3 < a + 1.$$

构造函数 $n(x) = e^x - 2x - 1 - (e^{x_3} - 2)(x - x_3)$, 其中 $x \in \mathbf{R}$, 则 $n(x_3) = 0$,

$n'(x) = e^x - e^{x_3}$.

当 $x < x_3$ 时, $n'(x) < 0$, 此时函数 $n(x)$

单调递减;

当 $x > x_3$ 时, $n'(x) > 0$, 此时函数 $n(x)$ 单调递增, 则 $n(x) \geq n(x_3) = 0$,

所以对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $p(x) \geq (e^{x_3} - 2) \cdot (x - x_3)$, 当且仅当 $x = x_3$ 时等号成立, 所以 $p(x_2) = e^{x_2} - 2x_2 - 1 = a >$

$(e^{x_3} - 2) \cdot (x_2 - x_3)$, 可得 $x_2 < \frac{a}{e^{x_3} - 2} +$

$x_3 = x'_2$,

因此 $x_2 - x_1 < x'_2 - x'_1 < a + 1 + a = 2a + 1$, 故原不等式成立.

6. 【解】(1) 由题意可知, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{且 } f'(x) = \frac{a}{x} + \frac{1}{4} - \frac{3a^2}{x^2} = \frac{x^2 + 4ax - 12a^2}{4x^2} = \frac{(x-2a)(x+6a)}{4x^2}, a \neq 0.$$

① 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$ 得 $x > 2a$, 令 $f'(x) < 0$ 得 $0 < x < 2a$,

可知 $f(x)$ 在 $(2a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, 2a)$ 上单调递减;

② 当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$ 得 $x > -6a$, 令 $f'(x) < 0$ 得 $0 < x < -6a$,

可知 $f(x)$ 在 $(-6a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, -6a)$ 上单调递减.

综上所述, 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(2a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, 2a)$ 上单调递减;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-6a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, -6a)$ 上单调递减.

(2) 当 $a = -\frac{1}{6}e$ 时, 由 (1) 可知, 函数

$f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, e)$ 上单调递减,

即当 $x = e \in (1, 3)$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极小值, 同时也是最小值, 最小值为

$$f(e) = \frac{1}{6}e + \frac{1}{4}e + \frac{1}{12}e = \frac{1}{6}e.$$

若对任意 $x_1 \in [1, 4]$, 存在 $x_2 \in (1, 3)$, 使 $g(x_1) \geq f(x_2)$,

等价于任意 $x_1 \in [1, 4]$, $g(x_1) \geq \frac{1}{6}e$,

即 $2x^2 - me^x \geq \frac{1}{6}e$, 整理可得 $m \leq$

$$\frac{2x^2 - \frac{1}{6}e}{e^x} (x \in [1, 4]).$$

$$\text{构造函数 } h(x) = \frac{2x^2 - \frac{1}{6}e}{e^x}, x \in [1, 4],$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{4xe^x - \left(2x^2 - \frac{1}{6}e\right)e^x}{(e^x)^2} =$$

$$\frac{-2(x-1)^2 + 2 + \frac{1}{6}e}{e^x},$$

由 $h'(x) = 0$, 得 $x = 1 + \sqrt{1 + \frac{e}{12}}$ 或 $x =$

$$1 - \sqrt{1 + \frac{e}{12}} \text{ (舍)},$$

当 $1 \leq x < 1 + \sqrt{1 + \frac{e}{12}}$ 时, $h'(x) > 0$; 当

$$1 + \sqrt{1 + \frac{e}{12}} < x \leq 4 \text{ 时}, h'(x) < 0,$$

可知函数 $h(x)$ 在 $\left[1, 1 + \sqrt{1 + \frac{e}{12}}\right)$ 上

单调递增, 在 $\left(1 + \sqrt{1 + \frac{e}{12}}, 4\right]$ 上单调

递减,

则当 $x = 1 + \sqrt{1 + \frac{e}{12}}$ 时, $h(x)$ 取得极大

值同时也是最大值,

$$\text{且 } h(1) = \frac{2 - \frac{e}{6}}{e} = \frac{2}{e} - \frac{1}{6}, h(4) =$$

$$\frac{2 \times 4^2 - \frac{e}{6}}{e^4} = \frac{32}{e^4} - \frac{1}{6e^3}, h(1) - h(4) = \frac{2}{e} -$$

$$\frac{1}{6} \left(\frac{32}{e^4} - \frac{1}{6e^3} \right) = \frac{12e^3 - e^4 - 32 \times 6 + e}{6e^4} < 0,$$

可知 $h(1) < h(4)$, 则函数 $h(x)$ 的最小

$$\text{值为 } h(1) = \frac{2}{e} - \frac{1}{6},$$

可得 $m \leq \frac{2}{e} - \frac{1}{6}$, 所以实数 m 的取值

$$\text{范围为 } \left(-\infty, \frac{2}{e} - \frac{1}{6}\right].$$

7. 思路导引 (1) 求出 $f'(x) \rightarrow f'(0) \rightarrow$ 曲线在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

$$(2) \text{ 求出 } g'(x) = e^x \left[\ln(x+1) + \frac{2x+1}{(x+1)^2} \right]$$

$$\frac{x \geq 0}{\rightarrow} g'(x) > 0 \rightarrow g(x) \text{ 单调递增};$$

(3) 根据题意设关于 s 的函数 $F(s) = f(s+t) - f(s) - f(t) \rightarrow$ 求出 $F'(s) \rightarrow$ 转化为 $F'(s) = g(s+t) - g(s) \xrightarrow{\text{结合(2)}} F'(s) > 0 \rightarrow F(s) > 0 \rightarrow f(s+t) > f(s) + f(t)$

(1) 【解】因为 $f(x) = e^x \ln(x+1)$, 所以

$$f'(x) = e^x \ln(x+1) + e^x \cdot \frac{1}{x+1}, \text{ 所以}$$

$f'(0) = 1$, 而 $f(0) = 0$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y - 0 = x - 0$, 即 $x - y = 0$.

$$(2) \text{ 【解】 } g(x) = f'(x) = e^x \ln(x+1) + e^x \cdot \frac{1}{x+1} = e^x \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right],$$

$$\text{则 } g'(x) = e^x \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right] +$$

$$e^x \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right] = e^x \left[\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right] = e^x \left[\ln(x+1) + \frac{2x+1}{(x+1)^2} \right].$$

$$\text{因为 } x \geq 0, \text{ 所以 } \ln(x+1) \geq 0, \frac{2x+1}{(x+1)^2} >$$

$$0, e^x \geq 1, \text{ 所以 } g'(x) > 0, \text{ 所以 } g(x) \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上单调递增.}$$

(3) 【证明】设 $F(s) = f(s+t) - f(s) - f(t) = e^{s+t} \ln(1+s+t) - e^s \ln(1+s) -$

$$e^t \ln(1+t), \text{ 则 } F'(s) = e^{s+t} \left[\ln(1+s+t) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{1+s+t} \right] - e^s \left[\ln(1+s) + \frac{1}{1+s} \right] = g(s+t) - g(s).$$

【敲黑板】: 设出 $F(s)$ 后, 说明变量只是 s , 则把 t 看作常量, 求导时要注意这点.

由 (2) 知 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $s > 0, t > 0$, 所以 $g(s+t) > g(s)$, 即 $F'(s) > 0$, $F(s)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $F(s) > f(0+t) - f(0) - f(t) = -f(0) = 0$, 所以对任意的 $s, t \in (0, +\infty)$, 有 $f(s+t) > f(s) + f(t)$.

8. (1) 【解】令 $g(x) = (2x-1)e^x$, 其中 $x \in \mathbf{R}$, 则 $g'(x) = (2x+1)e^x$,

当 $x < -\frac{1}{2}$ 时, $g'(x) < 0$, 此时函数 $g(x)$

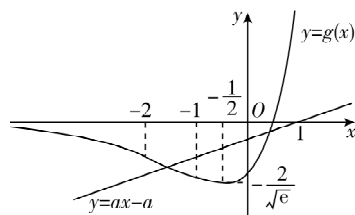
单调递减, 当 $x > -\frac{1}{2}$ 时, $g'(x) > 0$, 此

时函数 $g(x)$ 单调递增,

所以 $g(x)_{\min} = g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{e}}$, 且当 $x <$

$\frac{1}{2}$ 时, $g(x) < 0$; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $g(x) > 0$.

由 $f(x) < 0$ 可得 $g(x) < a(x-1)$, 作出函数 $y = g(x)$, $y = a(x-1)$ 的大致图象如图①所示.



图①

因为 y 且只有两个整数 x , 使得 $f(x) < 0$, 所以满足不等式 $g(x) < ax - a$ 的整数 x 只有两个, 所以 $\begin{cases} g(-2) \geq -3a, \\ g(-1) < -2a, \end{cases}$ 解得 $\frac{5}{3e^2} \leq a <$

$$\frac{3}{2e}, \text{ 即实数 } a \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{5}{3e^2}, \frac{3}{2e} \right).$$

(2) 【解】当直线 $y = ax - a$ 与函数 $g(x)$ 的图象相切时, 设切点坐标为 $(t, (2t-1)e^t)$, 则切线斜率为 $(2t+1)e^t$, 所以所求切线方程为 $y - (2t-1)e^t = (2t+1)e^t(x-t)$, 即 $y = (2t+1)e^t x - (2t^2-t+1)e^t$, 所以 $a = (2t+1)e^t = (2t^2-t+1)e^t$, 解得 $t = 0$ 或 $t = \frac{3}{2}$.

当 $t = 0$ 时, $a = 1$; 当 $t = \frac{3}{2}$ 时, $a = 4e^{\frac{3}{2}}$.

如图②所示, 当 $a \leq 0$ 时, 直线 $y = ax - a$ 与函数 $g(x)$ 的图象只有 1 个公共点;

当 $0 < a < 1$ 或 $a > 4e^{\frac{3}{2}}$ 时, 直线 $y = ax - a$ 与函数 $g(x)$ 的图象有 2 个公共点;

当 $a = 1$ 或 $a = 4e^{\frac{3}{2}}$ 时, 直线 $y = ax - a$ 与函数 $g(x)$ 的图象只有 1 个公共点;

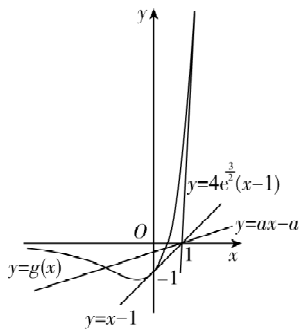
当 $1 < a < 4e^{\frac{3}{2}}$ 时, 直线 $y = ax - a$ 与函数 $g(x)$ 的图象无公共点.

综上所述, 当 $1 < a < 4e^{\frac{3}{2}}$ 时, 函数 $f(x)$ 无零点;

当 $a \leq 0$ 或 $a = 1$ 或 $a = 4e^{\frac{3}{2}}$ 时, 函数

$f(x)$ 只有 1 个零点;

当 $0 < a < 1$ 或 $a > 4e^{\frac{3}{2}}$ 时, 函数 $f(x)$ 有 2 个零点.



图②

(3) 【证明】不妨设 $x_1 \leq x_2$, 构造函数

$p(x) = tf(x) + (1-t)f(x_2) - f(tx + (1-t)x_2)$, 其中 $-\frac{3}{2} \leq x \leq x_2$, 因为 $f'(x) =$

敲黑板: 构造的函数 $p(x)$ 是把 x_1 看作变量, x_2 看作常量

$(2x+1) \cdot e^x - a$, 所以 $p'(x) = tf'(x) - tf'(tx + (1-t)x_2) = t(2x+1)e^x - t[2tx + 2(1-t)x_2 + 1]e^{tx + (1-t)x_2}$, 令 $h(x) = (2x+1)e^x$, 其中 $x \geq -\frac{3}{2}$, 则 $h'(x) = (2x+3)e^x \geq 0$ 且 $h'(x)$ 不恒为零, 故函数 $h(x)$ 在 $[-\frac{3}{2}, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $0 < t < 1$, 所以 $tx + (1-t)x_2 - x = (t-1)(x-x_2) \geq 0$, 故 $tx + (1-t)x_2 \geq x \geq -\frac{3}{2}$, 所以 $tf'(x) \leq tf'(tx + (1-t)x_2)$,

故 $p'(x) = t \cdot f'(x) - t \cdot f'(tx + (1-t)x_2) \leq 0$ 且等号不恒成立, 所以函数 $p(x)$ 在 $[-\frac{3}{2}, +\infty)$ 上单调递减, 故当

$x \in [-\frac{3}{2}, x_2]$ 时, $p(x) \geq p(x_2) = 0$, 因为 $x_1 \in [-\frac{3}{2}, x_2]$, 则 $p(x_1) \geq p(x_2) = 0$, 因此 $\forall x_1, x_2 \in [-\frac{3}{2}, +\infty)$ 且 $\forall t \in (0, 1)$, 有 $tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq f(tx_1 + (1-t)x_2)$.

归纳总结 若问题中两个变量没有明确的数量等式关系, 有时可以把其中一个当常数, 另外一个当自变量, 转化为单调性问题.

专题 13 极值点偏移问题

刷难关

1. (1) 【解】对 $f(x)$ 求导得 $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$.

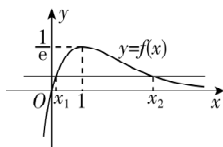
$f'(x) > 0 \Rightarrow x < 1$; $f'(x) < 0 \Rightarrow x > 1$.

则 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 1)$, 单调递减区间为 $(1, +\infty)$.

(2) 【证明】方法一 (构造对称函数): 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, $f(0) = 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0^+$,

函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)$, 且 $f(1) = \frac{1}{e}$, 作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



因为 $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 \neq x_2$, 所以不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $0 < x_1 < 1 < x_2$,

欲证 $x_1 + x_2 > 2$, 即证 $x_2 > 2 - x_1$, 故 $2 - x_1, x_2 \in (1, +\infty)$.

又因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以只需证 $f(x_2) < f(2 - x_1)$. 又因为 $f(x_1) = f(x_2)$,

所以即证 $f(x_1) < f(2 - x_1)$, 构造函数 $H(x) = f(x) - f(2-x)$, $x \in (0, 1)$, 则等价于证明 $H(x) < 0$ 在 $x \in (0, 1)$ 上恒成立.

由 $H'(x) = f'(x) + f'(2-x) = \frac{1-x}{e^x} (1 - e^{2-2x}) > 0$, 得 $H(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 又当 $x \rightarrow 1$ 时, $H(x) \rightarrow 0$, 所以 $H(x) < 0$, 即 $H(x) < 0$ 在 $x \in (0, 1)$ 上恒成立, 故 $x_1 + x_2 > 2$.

方法二 (比值代换): 由 $f(x_1) = f(x_2)$, 得 $x_1 e^{-x_1} = x_2 e^{-x_2}$, 化简得 $e^{\frac{x_2}{x_1} - x_1} = \frac{x_2}{x_1}$,

不妨设 $x_2 > x_1$, 由方法一知 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 令 $t = x_2 - x_1$, 则 $t > 0, x_2 = t + x_1$,

代入 $e^{\frac{x_2}{x_1} - x_1} = \frac{x_2}{x_1}$, 得 $e^t = \frac{t+x_1}{x_1}$, 则 $x_1 =$

$\frac{t}{e^t - 1}$, 则 $x_1 + x_2 = 2x_1 + t = \frac{2t}{e^t - 1} + t$,

故要证 $x_1 + x_2 > 2$, 即证 $\frac{2t}{e^t - 1} + t > 2$,

又因为 $e^t - 1 > 0$, 所以等价于证明 $2t + (t-2)(e^t - 1) > 0 (t > 0)$.

构造函数 $G(t) = 2t + (t-2)(e^t - 1)$, $t > 0$, 则 $G'(t) = (t-1)e^t + 1$, 令 $G'(t) = p(t)$, 则 $p'(t) = te^t$.

当 $t > 0$ 时, $p'(t) > 0$, 则 $G'(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 当 $t \rightarrow 0$ 时, $G'(t) \rightarrow 0$, 则 $G'(t) > 0$,

则 $G(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又当 $t \rightarrow 0$ 时, $G(t) \rightarrow 0$, 则 $G(t) > 0$, 则当 $t > 0$ 时, $2t + (t-2)(e^t - 1) > 0$ 恒成立, 即 $x_1 + x_2 > 2$.

方法三 (对数均值不等式): 由 $f(x_1) = f(x_2)$ 得 $\frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{x_2}{e^{x_2}}$, 由方法一得 $x_1, x_2 > 0$,

两边取对数得 $\ln x_1 - x_1 = \ln x_2 - x_2$, 则

$\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} = 1$, 要证 $x_1 + x_2 > 2$, 即证 $\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$,

不妨设 $x_1 > x_2 > 0$, 即证 $\frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} < \ln x_1 - \ln x_2$,

即证 $2 \left(\frac{x_1}{x_2} - 1 \right) < \ln \frac{x_1}{x_2}$.

令 $t = \frac{x_1}{x_2} > 1$, 即证 $\frac{2(t-1)}{t+1} < \ln t$. 令

$\varphi(t) = \frac{2(t-1)}{t+1} - \ln t (t > 1)$, 则 $\varphi'(t) = \frac{2(t+1) - 2(t-1)}{(t+1)^2} - \frac{1}{t} = -\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} < 0$ 在

$(1, +\infty)$ 上恒成立, 则 $\varphi(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 又当 $t \rightarrow 1$ 时,

$\varphi(t) \rightarrow 0$, 则 $\varphi(t) < 0$, 故 $\frac{2(t-1)}{t+1} < \ln t$, 故 $x_1 + x_2 > 2$ 得证.

归纳总结 极值点偏移的基本题型是研究函数的零点相较于极值点的偏移, 证明与函数多个零点 (一般是两个) 的关系 (最基础的是和与极值点二倍的关系).

常见的研究方法:

(1) 构造对称函数法

此解法解题过程会构造类似于 $f(2-x)$ 这样的函数, 这个函数的图象与 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 所以此方法一般称为构造对称函数法. 这两个函数图象的差的正负体现在图象上, 对应了零点相较于极值点的偏移关系.

解题步骤:

①求导确定 $f(x)$ 的单调性, 得到 x_1, x_2 的范围;

②构造函数 $F(x) = f(x) - f(a-x)$, 求导得到 $F(x)$ 恒正或恒负;

③得到 $f(x_1)$ 与 $f(a-x_1)$ 的大小关系后, 将 $f(x_1)$ 置换为 $f(x_2)$;

④根据 x_2 与 $a-x_1$ 的范围, 结合 $f(x)$ 的单调性, 可得 x_2 与 $a-x_1$ 的大小关系, 由此证得结论.

(2) 比值代换、差值代换

解题步骤为写出 $f(x_1) = f(x_2)$ 对应的代数式, 尝试对 x_1, x_2 这两个元进行消元, 但题目一般无法用其中一个表示另外一个, 可以考虑构造两者的比值或差值为新的主元表示它们. 指数形式的函数问题一般较多用差值代换, 对数形式的函数问题一般较多用比值代换.

(3) 二级结论: 对数均值不等式、指数均值不等式

对数均值不等式 $\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} <$

$\frac{a+b}{2} (a > 0, b > 0, a \neq b)$,

指数均值不等式 $e^{\frac{a+b}{2}} < \frac{e^a - e^b}{a-b} < \frac{e^a + e^b}{2}$

($a \neq b$).

如果 $f(x_1) = f(x_2)$ 可以进行代数变形得到上述形式, 那么就可以利用此结论做题, 但需注意在大题中要先证明.

2. 【证明】由 $f(x) = \ln x - ax = 0$, 得 $a = \frac{\ln x}{x}$ ($x > 0$).

$$\text{令 } g(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

当 $x \in (0, e)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$

单调递减, 且 $g(e) = \frac{1}{e}$,

不妨设 $x_1 < x_2$, 易知 $0 < x_1 < e < x_2$, 所以要证 $x_1 x_2 > e^2$, 只需证 $x_1 > \frac{e^2}{x_2}$,

因为 $x_2 > e$, 所以 $0 < \frac{e^2}{x_2} < e$,

因为 $0 < x_1 < e$, $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 所以要证 $x_1 > \frac{e^2}{x_2}$,

只需证 $g(x_1) > g\left(\frac{e^2}{x_2}\right)$.

又因为 $g(x_1) = g(x_2)$, 即证 $g(x_2) > g\left(\frac{e^2}{x_2}\right)$ ($x_2 > e$).

下面构造对称差函数, 令 $F(x) = g(x) - g\left(\frac{e^2}{x}\right)$, $x > e$,

$$\text{则 } F'(x) = g'(x) - g'\left(\frac{e^2}{x}\right) \cdot \frac{-e^2}{x^2} =$$

避坑: 复合函数求导时, 勿忘记对内层函数求导

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{1 - \ln \frac{e^2}{x}}{\left(\frac{e^2}{x}\right)^2} \cdot \frac{e^2}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} +$$

$$\frac{x^2(1 - 2 + \ln x)}{e^4} \cdot \frac{e^2}{x^2} = (1 - \ln x) \cdot$$

$$\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{e^2}\right), \text{ 因为 } x > e, \text{ 所以 } 1 - \ln x < 0,$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{e^2} < 0,$$

于是 $F'(x) > 0$,

所以 $F(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增,

当 $x \rightarrow e$ 时, $F(x) \rightarrow 0$, 所以 $F(x) > 0$,

即 $g(x_2) > g\left(\frac{e^2}{x_2}\right)$, 问题得证.

多种解法一 利用参数 a 作为媒介, 换元后构造新函数

不妨设 $x_1 > x_2 > 0$,

由 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 得 $\ln x_1 - ax_1 = 0$, $\ln x_2 - ax_2 = 0$, 所以 $\ln x_1 + \ln x_2 =$

$a(x_1 + x_2)$, $\ln x_1 - \ln x_2 = a(x_1 - x_2)$, 所以 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = a$.

欲证 $x_1 x_2 > e^2$, 即证 $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$,

即证 $a(x_1 + x_2) > 2$, 即证 $a > \frac{2}{x_1 + x_2}$,

$$\text{即证 } \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} > \frac{2}{x_1 + x_2},$$

$$\text{即证 } \ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2\left(\frac{x_1}{x_2} - 1\right)}{\frac{x_1}{x_2} + 1}.$$

令 $t = \frac{x_1}{x_2}$, $t > 1$, 即证 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$, 令

$$g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}, t > 1, \text{ 则 } g'(t) =$$

$$\frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0,$$

所以 $g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

当 $t \rightarrow 1$ 时, $g(t) \rightarrow 0$, 所以 $g(t) > 0$,

$$\text{即 } \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}, \text{ 即 } x_1 x_2 > e^2.$$

多种解法二 直接换元构造新函数

$$\text{由已知, 得 } a = \frac{\ln x_1}{x_1} = \frac{\ln x_2}{x_2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln x_2}{\ln x_1} = \frac{x_2}{x_1},$$

设 $x_1 < x_2$, $t = \frac{x_2}{x_1}$ ($t > 1$), 则 $x_2 = tx_1$, 所

$$\text{以 } \frac{\ln(tx_1)}{\ln x_1} = t, \text{ 即 } \frac{\ln t + \ln x_1}{\ln x_1} = t,$$

$$\text{则 } \ln x_1 = \frac{\ln t}{t-1}, \text{ 所以 } \ln x_2 = \ln(tx_1) =$$

$$\ln t + \ln x_1 = \ln t + \frac{\ln t}{t-1} = \frac{t \ln t}{t-1}.$$

要证 $x_1 x_2 > e^2$, 即证 $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$, 即

$$\text{证 } \frac{t+1}{t-1} \ln t > 2,$$

$$\text{即证 } \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} > 0,$$

$$\text{令 } g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}, t > 1, \text{ 则}$$

$$g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0,$$

所以 $g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

当 $t \rightarrow 1$ 时, $g(t) \rightarrow 0$, 所以 $g(t) > 0$,

$$\text{所以 } \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} > 0,$$

所以 $x_1 x_2 > e^2$.

归纳总结 证明极值点偏移问题中

类似于 $x_1 x_2 < a^2$ (或 $x_1 x_2 > a^2$) (x_1, x_2, a 都为正数) 类型的问题的步骤:

① 首先构造函数 $g(x) = f(x) - f\left(\frac{a^2}{x}\right)$, 对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别求导, 确

定函数 $y = f(x)$ 和函数 $y = g(x)$ 的单调性;

② $f(x_1) = f(x_2)$, 确定两个零点的大小关系 $0 < x_1 < a < x_2$, 由函数 $g(x)$ 的单

调性, 得 $g(x_1) = f(x_1) - f\left(\frac{a^2}{x_1}\right) =$

$f(x_2) - f\left(\frac{a^2}{x_1}\right)$ 与零的大小关系;

③ 最后由函数 $y = f(x)$ 的单调性得到 x_2

与 $\frac{a^2}{x_1}$ 的大小关系, 从而证明相应问题.

3. (1) 【解】当 $a = 1$ 时, $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$, $x \in$

$(0, +\infty)$, 则 $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$, 由 $f'(x) =$

0 , 解得 $x = 1$.

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, 单调递减区间为 $(1, +\infty)$.

(2) (i) 【解】由 $\frac{1 + \ln x}{ax} = 1$, 得 $\frac{1 + \ln x}{x} =$

$$a, \text{ 设 } g(x) = \frac{1 + \ln x}{x},$$

由 (1) 得 $g(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

又 $g\left(\frac{1}{e}\right) = 0$, $g(1) = 1$, 当 $x > \frac{1}{e}$ 时,

$g(x) > 0$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0^+$,

避坑: 需要根据 $g(x)$ 的单调性判断 $g(x)$ 的值域, 可在草图上画出 $g(x)$ 图象的大致趋势, 以防 a 的取值范围判断错误

所以当 $0 < a < 1$ 时, 方程 $\frac{1 + \ln x}{x} = a$ 有两个

不同的根, 即方程 $\frac{1 + \ln x}{ax} = 1$ 有两个不同

的根, 故实数 a 的取值范围是 $(0, 1)$.

(ii) 【证明】不妨设 $x_1 < x_2$, 由 (i) 可知

$$0 < x_1 < 1 < x_2, \text{ 且 } \frac{\ln x_1 + 1}{x_1} = \frac{\ln x_2 + 1}{x_2}.$$

当 $x_2 \in [2, +\infty)$ 时, $x_1^2 + x_2^2 > x_2^2 \geq 4 > 2$, 即 $x_1^2 + x_2^2 > 2$;

当 $x_2 \in (1, 2)$ 时,

$$\text{设 } p(x) = g(x) - g(2-x) = \frac{\ln x + 1}{x} -$$

$$\frac{\ln(2-x) + 1}{2-x}, 0 < x < 1,$$

$$\text{则 } p'(x) = -\frac{\ln x + 1}{x^2} - \frac{\ln(2-x)}{(2-x)^2} > -\frac{\ln x}{x^2} -$$

$$\frac{\ln(2-x)}{x^2} = -\frac{\ln[-(x-1)^2 + 1]}{x^2} > 0,$$

则 $p(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 又

当 $x \rightarrow 1$ 时, $p(x) \rightarrow 0$, 则 $p(x) < 0$, 即

$g(x) < g(2-x)$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立. 又 $x_1 \in (0, 1)$, 所以 $g(2-x_1) > g(x_1) = g(x_2)$.

因为 $2-x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $2-x_1 < x_2$, 即 $x_1 + x_2 > 2$. 又 $x_1 \neq x_2$,

所以 $x_1^2 + x_2^2 > 2x_1 x_2$,

故 $2x_1^2 + 2x_2^2 > x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 > 4$, 所以 $x_1^2 + x_2^2 > 2$.

综上, $x_1^2 + x_2^2 > 2$.

多种解法 (2) (ii) 不妨设 $x_1 < x_2$, 由

(i) 可知 $0 < x_1 < 1 < x_2$. 设 $h(x) =$

$$g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1 + \ln x}{x} - x(1 - \ln x),$$

$x \in (0, +\infty)$, 则 $h'(x) = \frac{-\ln x}{x^2} + \ln x =$

$\ln x \cdot \frac{x^2-1}{x^2} \geq 0$ 且等号不恒成立,

所以 $h(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 又 $h(1) = 0$, 所以 $h(x_1) = g(x_1) - g\left(\frac{1}{x_1}\right) < 0$, 即 $g(x_1) < g\left(\frac{1}{x_1}\right)$.

又 $g(x_2) = g(x_1)$, 所以 $g(x_2) < g\left(\frac{1}{x_1}\right)$, 又 $x_2 > 1, \frac{1}{x_1} > 1, g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $x_2 > \frac{1}{x_1}$, 即 $x_1 x_2 > 1$. 又 $x_1 \neq x_2$, 所以 $x_1^2 + x_2^2 > 2x_1 x_2 > 2$, 得证.

名师点拨 非和、积类型的极值点偏移问题可以考虑转化为和、积类型的极值点偏移问题, 转化的方法之一就是放缩, 本题的两种解法分别是把平方和放缩成和与积.

4. (1) 【解】 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-a+x}{x^2}, \text{ 令 } f'(x) < 0,$$

解得 $0 < x < a$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > a$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x = a$ 处取得极小值, 且

$$f(a) = 1 + \ln a.$$

$$g'(x) = a - \frac{1}{x}, \text{ 令 } g'(x) < 0, \text{ 解得 } 0 < x < \frac{1}{a},$$

$$\frac{1}{a}, \text{ 令 } g'(x) > 0, \text{ 解得 } x > \frac{1}{a},$$

所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增,

所以 $g(x)$ 在 $x = \frac{1}{a}$ 处取得极小值, 且

$$g\left(\frac{1}{a}\right) = -1 + \ln a.$$

所以 $1 + \ln a - 1 + \ln a = 0$, 解得 $a = 1$.

(2) 【证明】令 $m = \frac{1}{x_1}, n = \frac{1}{x_2}$, 因为

$x_1 \neq x_2$, 所以 $m \neq n$. 不妨设 $m > n > 0$.

由 $f(x_1) = f(x_2) = 2 (x_1 \neq x_2)$ 可得

$$\begin{cases} \frac{a}{x_1} + \ln x_1 = 2, \\ \frac{a}{x_2} + \ln x_2 = 2, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} am - \ln m = 2 \text{ ①}, \\ an - \ln n = 2 \text{ ②}, \end{cases}$$

①-②, 得 $a(m-n) = \ln m - \ln n$, 所以 $\frac{1}{a} = \frac{m-n}{\ln m - \ln n}$.

要证 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{2}{a}$, 只要证 $m+n > \frac{2}{a}$, 只

$$\text{要证 } m+n > \frac{2(m-n)}{\ln m - \ln n},$$

$$\text{即证 } \ln \frac{m}{n} > \frac{2(m-n)}{m+n},$$

$$\text{即证 } \ln \frac{m}{n} > \frac{2\left(\frac{m}{n}-1\right)}{\frac{m}{n}+1},$$

$$\text{令 } t = \frac{m}{n} (t > 1), \text{ 即证 } \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1).$$

$$\text{令 } h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1), \text{ 则}$$

$$h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{2(t+1)-2(t-1)}{(t+1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0,$$

$$\frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0,$$

所以 $h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

当 $t \rightarrow 1$ 时, $h(t) \rightarrow 0$, 所以 $h(t) > 0$,

$$\text{即 } \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1),$$

$$\text{所以 } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{2}{a}.$$

名师点拨 非和、积类型的极值点偏移问题可以考虑转化为和、积类型的极值点偏移问题, 转化的方法之一就是换元.

第六章素养检测

刷速度

1. C 【解析】对 $f(x)$ 求导得 $f'(x) = \cos x$, $\therefore f'(0) = 1$, $\therefore f(x) = \sin x + 1$, $\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} + 1 = 2$. 故选 C.

2. B 【解析】由题图知点 P 的横坐标为 5, 因为点 P 在切线上, 所以点 P 的纵坐标为 $-5+8=3$, 所以 $f(5)=3$. 又切线

点悟: 切点既在切线上又在曲线上

斜率为 -1 , 则 $f'(5) = -1$, 则 $f(5) + f'(5) = 2$. 故选 B.

3. C 【解析】由 $f(x) = x^2 + \frac{a}{x} (a \in \mathbf{R})$,

$$\text{得 } f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2} = \frac{2x^3 - a}{x^2},$$

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f'(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 即 $a \leq 2x^3$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立. 而 $y = 2x^3$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $y_{\min} = 2 \times 1^3 = 2$, 所以 $a \leq 2$, 所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$. 故选 C.

4. B 【解析】显然, 当 $x \rightarrow 1$ 时, $\frac{x^2 \ln x}{x^2 - 1}$ 的

极限即为 $\frac{0}{0}$ 型, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 \ln x}{x^2 - 1} =$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 \ln x)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x \ln x + x}{2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\ln x + \frac{1}{2} \right) = \ln 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \text{ 故选 B.}$$

5. C 【解析】由题意可得 $f'(x) = e^x + a$, 当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 不存在极值点, 不符合题意, 舍去. 所以必有 $a < 0$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \ln(-a)$, 当 $x < \ln(-a)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > \ln(-a)$ 时, $f'(x) > 0$, 即恰好有一个极小值点 $\ln(-a)$, 符合题意. 故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0)$. 故选 C.

6. C 【解析】由 $y = 2 \ln x + a (a \in \mathbf{R})$ 知定义域为 $(0, +\infty)$, 则 $y' = \frac{2}{x}$,

此时曲线在点 P 处的切线斜率为 $\frac{2}{x_0}$.

又圆 $x^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}$ 的圆心 $(0, 1)$ 与

点 P 所在直线的斜率为 $\frac{y_0-1}{x_0}$,

所以圆在点 P 处的切线斜率为 $-\frac{x_0}{y_0-1}$.

$$\text{由题意知 } \frac{2}{x_0} = -\frac{x_0}{y_0-1} \Rightarrow y_0 = -\frac{x_0^2}{2} + 1, \text{ ①}$$

$$\text{又 } P(x_0, y_0) \text{ 在圆上, 所以 } x_0^2 + (y_0-1)^2 = \frac{5}{4}, \text{ ②}$$

$$\text{将①代入②中得 } x_0^2 + \left(-\frac{x_0^2}{2} + 1 - 1\right)^2 =$$

$$\frac{5}{4}, \text{ 化简得 } x_0^4 + 4x_0^2 - 5 = 0, \text{ 解得 } x_0^2 = 1$$

或 $x_0^2 = -5$ (舍去),

又 $x_0 > 0$, 所以 $x_0 = 1$, 此时 $y_0 = -\frac{1}{2} +$

$$1 = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } P\left(1, \frac{1}{2}\right),$$

将点 $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 的坐标代入 $y = 2 \ln x + a$

中, 得 $\frac{1}{2} = 2 \ln 1 + a$, 解得 $a = \frac{1}{2}$. 故

选 C.

7. A 【解析】令 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$,

$$x > -1, \text{ 则 } f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} =$$

$$\frac{x}{(1+x)^2} > 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0$,

$$\text{所以 } f(0.1) = \ln 1.1 - \frac{0.1}{1+0.1} > 0, \text{ 即}$$

$$\ln 1.1 > \frac{1}{11}, \text{ 所以 } b > a.$$

令 $g(x) = e^x - x - 1$, 则 $g'(x) = e^x - 1$, 当 $x < 0$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减; 当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 所以 $g(x) \geq g(0) = 0$, 即 $e^x \geq x + 1$ (当且仅当 $x = 0$ 时取等号),

$$\text{令 } x = -0.9, \text{ 则 } e^{-0.9} > -0.9 + 1 = 0.1.$$

令 $h(x) = \ln(1+x) - x, x > -1$, 则

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上}$$

恒成立,

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以当 $x > 0$ 时, $h(x) < h(0) = 0$,

所以 $h(0.1) = \ln(1+0.1) - 0.1 < 0$, 即 $\ln 1.1 < 0.1$,

所以 $e^{-0.1} > 0.1 > \ln 1.1$, 即 $c > b$, 综上 $c > b > a$. 故选 A.

8. B 【解析】设 $F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, 则 $F'(x) = \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)' = \frac{f'(x)x^2 - 2xf(x)}{x^4} = \frac{f'(x)x - 2f(x)}{x^3}$,

又当 $x \leq 0$ 时, $2f(x) - xf'(x) < 0$, 所以当 $x < 0$ 时, $F'(x) < 0$, 即函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.

因为函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 所以 $f(-x) = f(x)$,

又函数 $F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 定义域关于原点对称,

所以 $F(-x) = \frac{f(-x)}{(-x)^2} = \frac{f(x)}{x^2} = F(x)$, 所以函数 $F(x)$ 为偶函数, 所以函数 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以当 $x - 2.025 \neq 0$ 时, 不等式 $f(x - 2.025) - f(-1)(x - 2.025)^2 < 0$,

可化为 $\frac{f(x - 2.025)}{(x - 2.025)^2} < \frac{f(-1)}{(-1)^2}$, 即 $F(x - 2.025) < F(-1)$,

所以 $|x - 2.025| < |-1|$, 故 $2.024 < x < 2.026$, 且 $x \neq 2.025$.

因为当 $x \leq 0$ 时, $2f(x) - xf'(x) < 0$, 所以 $2f(0) < 0$, 即 $f(0) < 0$,

当 $x = 2.025$ 时, $f(x - 2.025) - f(-1) \cdot (x - 2.025)^2 = f(0) < 0$,

所以 $x = 2.025$ 满足不等式 $f(x - 2.025) - f(-1)(x - 2.025)^2 < 0$,

所以不等式 $f(x - 2.025) - f(-1) \cdot (x - 2.025)^2 < 0$ 的解集为 $(2.024, 2.026)$. 故选 B.

9. ABD 【解析】因为 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + a^3$, 所以 $f'(x) = 3x^2 + 6ax = 3x(x + 2a)$, 所以当 $a = 0$ 时, $f'(x) \geq 0$ 且不恒为 0, 则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, 当 $x < -2a$ 或 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $-2a < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2a)$, $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-2a, 0)$ 上单调递减;

当 $a < 0$ 时, 当 $x < 0$ 或 $x > -2a$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $0 < x < -2a$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(-2a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, -2a)$ 上单调递减.

对于 A, 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $a + 1 > a$,

所以 $f(a) < f(a + 1)$, A 正确;

对于 B, 由 $f(x)$ 的单调性可知, 存在 $a \geq 0$, 使得 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, B 正确;

对于 C, 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 不可能有三个零点, 则 $a \neq 0$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 由 $f(x)$ 的单调性可知要使

$f(x)$ 有三个零点, 须使

$\begin{cases} f(-2a)f(0) < 0, \\ a \neq 0, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} 5a^6 < 0, \\ a \neq 0, \end{cases}$ 不等式组

无解, 故不存在 a , 使得 $f(x)$ 有三个零点, C 错误;

对于 D, 设切点为 $(t, f(t))$, 则切线的斜率 $k = f'(t) = 3t^2 + 6at$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在 $x = t$ 处的切线方程为 $y - f(t) = (3t^2 + 6at)(x - t)$,

又点 $(-a, 3a^3)$ 在切线上, $f(t) = t^3 + 3at^2 + a^3$, 所以 $3a^3 - (t^3 + 3at^2 + a^3) = (3t^2 + 6at)(-a - t)$, 化简得 $(t + a)^3 = 0$,

解得 $t = -a$, 故切点为 $(-a, 3a^3)$, 即曲线 $y = f(x)$ 过点 $(-a, 3a^3)$ 的切线有且只有一条, D 正确. 故选 ABD.

10. CD 【解析】A 选项, $f'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x - 1 = -x \sin x - 1$, 故 $f'(0) = -1$, 所以 $f(x)$ 的图象在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $y = -x$, A 错误; B 选项, 当 $x \in [0, \pi)$ 时, $f'(x) < 0$ 恒成立, 故 $f(x)$ 在 $[0, \pi)$ 上单调递减, B 错误;

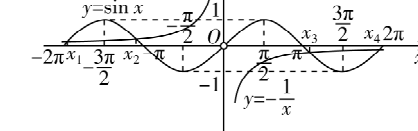
C, D 选项, 显然 $f'(0) \neq 0$, 当 $x \neq 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 则 $-x \sin x - 1 = 0$, 所以

$\sin x = -\frac{1}{x}$, 分别作出 $y = \sin x$ 和 $y = -\frac{1}{x}$ 在 $[-2\pi, 0) \cup (0, 2\pi]$ 上的图象, 如图所示,

由图可知, 这两个函数的图象在区间 $[-2\pi, 0) \cup (0, 2\pi]$ 上共有 4 个公共点, 且两个函数图象在这些公共点处都不相切,

其中当 $x \in (-2\pi, x_1)$ 时, $\sin x < -\frac{1}{x}$, $f'(x) = -x \sin x - 1 < 0$, 当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $\sin x > -\frac{1}{x}$, $f'(x) = -x \sin x - 1 > 0$, 当 $x \in (x_2, 0)$ 时, $\sin x < -\frac{1}{x}$, $f'(x) = -x \sin x - 1 < 0$,

故 x_1 为极小值点, x_2 为极大值点, 同理可得 x_3 为极小值点, x_4 为极大值点, 故 $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上的极值点的个数为 4, 有 2 个极大值点, C 正确, D 正确. 故选 CD.



由图可知, 这两个函数的图象在区间 $[-2\pi, 0) \cup (0, 2\pi]$ 上共有 4 个公共点, 且两个函数图象在这些公共点处都不相切,

其中当 $x \in (-2\pi, x_1)$ 时, $\sin x < -\frac{1}{x}$, $f'(x) = -x \sin x - 1 < 0$,

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $\sin x > -\frac{1}{x}$, $f'(x) = -x \sin x - 1 > 0$,

当 $x \in (x_2, 0)$ 时, $\sin x < -\frac{1}{x}$, $f'(x) = -x \sin x - 1 < 0$,

故 x_1 为极小值点, x_2 为极大值点, 同理可得 x_3 为极小值点, x_4 为极大值点, 故 $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上的极值点的个数为 4, 有 2 个极大值点, C 正确, D 正确. 故选 CD.

11. ABD 【解析】由函数 $f(x) = \frac{x}{e^x}$ 可得

$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$,

令 $f'(x) = 0$ 可得 $x = 1$, 当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时,

$f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值, 也是最大值, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$,

又 $f(1) = \frac{1}{e}$, 因此函数 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty, \frac{1}{e}]$, A 正确;

易知 $f'(0) = 1$, 又 $f(0) = 0$, 所以曲线 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为 $y = x$, B 正确;

设过点 $A(0, a)$ 的切线的切点为 $(x_0, \frac{x_0}{e^{x_0}})$, 则切线斜率为 $f'(x_0) = \frac{1-x_0}{e^{x_0}}$, 则切线方程为 $y - \frac{x_0}{e^{x_0}} = \frac{1-x_0}{e^{x_0}}(x - x_0)$, 将点 A 的坐标代入上式整理得

$a = \frac{x_0^2}{e^{x_0}}$,

令 $h(x) = \frac{x^2}{e^x}$, 则 $h'(x) = \frac{2x-x^2}{e^x} = \frac{x(2-x)}{e^x}$,

由 $h'(x) = 0$ 可得 $x = 0$ 或 $x = 2$, 当 $x < 0$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

当 $0 < x < 2$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, 当 $x > 2$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

因此 $h(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值 $h(0) = 0$, 在 $x = 2$ 处取得极大值 $h(2) = \frac{4}{e^2}$, 当 $x > 0$ 时, $h(x) > 0$, 且当

$x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow 0$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$,

因为过点 $A(0, a)$ 至少可以作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线, 所以 $y = a$ 与函数 $h(x)$ 的图象有三个交点, 因此 $0 < a < \frac{4}{e^2}$, C 错误;

可画出函数 $h(x)$ 的大致图象得到 a 的取值范围

设与直线 $y = x + 1$ 平行的切线的切点为 $(x_1, \frac{x_1}{e^{x_1}})$, 因为直线 $y = x + 1$ 的斜率为 1, 所以 $f'(x_1) = \frac{1-x_1}{e^{x_1}} = 1$,

即 $e^{x_1} = 1 - x_1$, 又因为函数 $y = e^x + x - 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 且当 $x = 0$ 时, $y = 0$, 所以 $x_1 = 0$, 即切点为 $(0, 0)$.

因此点 P 到直线 $y = x + 1$ 距离的最小值即为 $(0, 0)$ 到直线 $y = x + 1$ 的距离,

即 $d = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, D 正确. 故选 ABD.

12. 1 【解析】对 $f(x)$ 求导得 $f'(x) = 1 + \ln x - 1 = \ln x$,

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$,

故 $f(x)$ 的极小值点为 1.

13. $[e^2, +\infty)$ 【解析】设 $x_1 > x_2 > m$, 不等

式 $\frac{x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1}{x_1 - x_2} > 3$, 变形为 $\frac{\ln x_2 - 3}{x_2} > \frac{\ln x_1 - 3}{x_1}$.

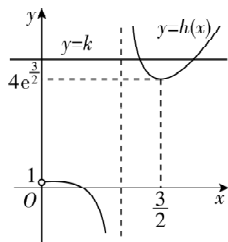
设函数 $f(x) = \frac{\ln x - 3}{x}$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(m, +\infty)$ 上单调递减, 由 $f'(x) = \frac{4 - \ln x}{x^2} = 0$, 得 $x = e^4$,

当 $x \in (0, e^4)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (e^4, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 所以 $m \geq e^4$.

14. $(4e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$ 【解析】由题知 $g(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 关于原点对称, $\therefore g(x) = f(x) + f(-x)$, $\therefore g(-x) = f(-x) + f(x) = g(x)$, $\therefore g(x)$ 为偶函数, 图象关于 y 轴对称, 又 $x \neq 0$, 且 $y = g(x)$ 恰有 4 个零点, $\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $y = g(x)$ 恰有 2 个零点, 当 $x > 0$ 时, $y = g(x)$ 恰有 2 个零点. 当 $x > 0$ 时, $-x < 0$, $g(x) = f(x) + f(-x) = (2x-1)e^x + k(-x+1)$, $\therefore$ 当 $x=1$ 时, $g(1) = e \neq 0$, $\therefore$ 当 $x > 0$ 且 $x \neq 1$ 时, 可转化为 $k = \frac{(2x-1)e^x}{x-1}$ 有 2 个不同的解.

令 $h(x) = \frac{(2x-1)e^x}{x-1}$ ($x > 0$ 且 $x \neq 1$), 则 $h'(x) = \frac{x(2x-3)e^x}{(x-1)^2}$, 令 $h'(x) = 0$, 解得 $x = 0$ (舍去) 或 $x = \frac{3}{2}$,

$\therefore$ 当 $0 < x < \frac{3}{2}$ 或 $1 < x < \frac{3}{2}$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, 当 $x > \frac{3}{2}$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, $h(x)_{\text{极小值}} = h\left(\frac{3}{2}\right) = 4e^{\frac{3}{2}}$, 又当 $x \rightarrow 1^+$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, 作出函数 $h(x)$ 的大致图象如图所示, 由图可得当 $k > 4e^{\frac{3}{2}}$ 时, $k = \frac{(2x-1)e^x}{x-1}$ 有 2 个不同的解, 即当 $x > 0$ 时, $y = g(x)$ 有 2 个零点, 所以若 $y = g(x)$ 恰有 4 个零点, 则实数 k 的取值范围是 $(4e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$.



15. 【解】(1) 由切点既在曲线上, 又在切线上, 得 $f(1) = 5 - 9 = -4$, 且 $f'(1) = -12 + b + 7$, 解得 $b = 1$.

$\therefore f'(x) = \frac{a}{x} + \frac{12}{x^2} + b$, $\therefore f'(1) = a + 12 + b = 5$, 即 $a = -8$. 综上, $a = -8, b = 1$.

(2) 由 (1) 得 $f(x) = -8 \ln x - \frac{12}{x} + x + 7$ ($x \in [1, 4]$), $\therefore f'(x) = \frac{-8}{x} + \frac{12}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2} = \frac{(x-2)(x-6)}{x^2}$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 2, x = 6$ (舍), 当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如表所示.

x	$(1, 2)$	2	$(2, 4)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减

$\therefore f(x)_{\text{max}} = f(2) = 3 - 8 \ln 2$. $\therefore f(1) = -12 + 1 + 7 = -4, f(4) = 8 - 8 \ln 4, e^3 > 2, 7^3 = 19.683$, $\therefore f(1) - f(4) = 8 \ln 4 - 12 = 4(2 \ln 4 - 3) = 4(\ln 16 - \ln e^3) < 0$, 即 $f(1) < f(4)$, 故 $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的最大值为 $3 - 8 \ln 2$, 最小值为 -4 .

16. 【解】(1) 设 $w(x) = kx + b$, 由 $\begin{cases} w(1) = 57, \\ w(10) = 120, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} k + b = 57, \\ 10k + b = 120, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = 7, \\ b = 50, \end{cases}$ 所以 $w(x) = 7x + 50$. 依题意得 $F(x) = xG(x) - 50 - 7x = x\left(\frac{7}{x^2} + \frac{20 \ln x}{x} + \frac{84}{x} + 4\right) - 50 - 7x = \frac{7}{x} + 20 \ln x - 3x + 34$ ($x > 0$).

(2) 由 (1) 得 $F(x) = -\frac{7}{x} + 20 \ln x - 3x + 34$ ($x > 0$), 则 $F'(x) = \frac{7}{x^2} + \frac{20}{x} - 3 = \frac{-3x^2 + 20x + 7}{x^2} = \frac{(3x+1)(x-7)}{x^2}$, 令 $F'(x) > 0$, 得 $0 < x < 7$, 令 $F'(x) < 0$, 得 $x > 7$, 所以 $F(x)$ 在 $(0, 7)$ 上单调递增, 在 $(7, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $F(x)_{\text{max}} = F(7) = 20 \ln 7 + 12 \approx 20 \times 1.95 + 12 = 51$, 即当产量为 7 百件时, 该企业在这种产品的生产中获利最大, 且最大利润约为 51 万元.

17. (1) 【解】当 $a = -2$ 时, $f(x) = -2 \ln x + x + 4$, 定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = -\frac{2}{x} + 1 = \frac{x-2}{x}$, 故当 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 故 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增. (2) 【证明】 $f(x) = a \ln x + x - 2a$, 因为曲线 $y = f(x)$ 过点 $A(1, -1)$, 所以 $f(1) = 1 - 2a = -1$, 解得 $a = 1$,

此时 $f(x) = \ln x + x - 2, f'(x) = \frac{1}{x} + 1$.

又 $f(1) = -1, f'(1) = 2$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 A 处的切线 l 的方程为 $y - (-1) = 2(x - 1)$, 即 $y = 2x - 3$.

要证: 除切点 A 外, 曲线 $y = f(x)$ 在直线 l 的下方, 即证: $2x - 3 - (\ln x + x - 2) \geq 0$, 即证: $\ln x - x + 1 \leq 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号.

令 $h(x) = \ln x - x + 1$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$,

故当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减, 故当 $x = 1$ 时, $h(x)$ 取得极大值, 也是最大值, 且 $h(1) = 0$, 故 $h(x) \leq h(1) = 0$, 即 $\ln x - x + 1 \leq 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号, 故除切点 A 外, 曲线 $y = f(x)$ 在直线 l 的下方.

18. (1) 【解】 $f'(x) = e^x - a$, 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增; 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = e^x - a = 0$, 解得 $x = \ln a$, 所以当 $x \in (-\infty, \ln a)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增. 综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增; 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增. (2) 【证明】由 (1) 得若 $x_1 < x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_1 \in (-\infty, \ln a), x_2 \in (\ln a, +\infty)$.

要证 $x_1 + x_2 < 2 \ln a$, 只需证 $x_1 < 2 \ln a - x_2$, 而 $x_1 < 2 \ln a - x_2 < \ln a$, 且函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 故只需证 $f(x_1) > f(2 \ln a - x_2)$, 又 $f(x_1) = f(x_2)$, 所以只需证 $f(x_2) > f(2 \ln a - x_2)$, 即证 $f(x_2) - f(2 \ln a - x_2) > 0$. 令 $h(x) = f(x) - f(2 \ln a - x)$,

【破题】极值点偏移, 构造差函数

即 $h(x) = e^x - ax - 1 - [e^{2 \ln a - x} - a(2 \ln a - x) - 1] = e^x - a^2 e^{-x} - 2ax + 2a \ln a$, 则 $h'(x) = e^x + a^2 e^{-x} - 2a$, 由基本不等式可得 $h'(x) = e^x + a^2 e^{-x} - 2a \geq 2\sqrt{e^x \cdot a^2 e^{-x}} - 2a = 0$ (当且仅当 $e^x = a^2 e^{-x}$, 即 $x = \ln a$ 时, 等号成立). 所以函数 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 由 $x_2 > \ln a$, 可得 $h(x_2) > h(\ln a) = 0$, 即 $f(x_2) - f(2 \ln a - x_2) > 0$, 所以 $f(x_1) > f(2 \ln a - x_2)$, 则 $x_1 + x_2 < 2 \ln a$, 得证.

(3) 【解】 $g(x) = e^x - ax + \sin x - 1$, 则 $g'(x) = e^x + \cos x - a$, 令 $m(x) = e^x + \cos x - a$, 则 $m'(x) = e^x - \sin x$, 当 $x \geq 0$ 时, $m'(x) > 0$, 所以 $g'(x)$ 在

$(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $g'(0) = 2-a$.

①当 $a \leq 2$ 时, 若 $x \geq 0$, 则 $g'(x) \geq g'(0) = 2-a \geq 0$, 且等号不恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g(x) \geq g(0) = 0$, 符合题意, 故 $a \leq 2$.

②当 $a > 2$ 时, $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $g'(0) = 2-a < 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g'(x) \rightarrow +\infty$, 所以 $\exists x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $g'(x_0) = 0$, 所以当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $g(x)_{\min} = g(x_0) < g(0) = 0$, 所以不符合题意. 综上, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$.

多种解法 (3) $g(x) = f(x) + \sin x = e^x - ax + \sin x - 1$, 当 $x = 0$ 时, $g(0) = 0 \geq 0$ 恒成立. 当 $x > 0$ 时, 由 $g(x) \geq 0$ 得 $e^x - ax + \sin x - 1 \geq 0$, 即 $a \leq \frac{e^x + \sin x - 1}{x} (x > 0)$. 令 $\varphi(x) = \frac{e^x + \sin x - 1}{x}$, 则 $\varphi'(x) = \frac{(e^x + \cos x)x - (e^x + \sin x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x + x\cos x - e^x - \sin x + 1}{x^2}$, 令 $s(x) = xe^x + x\cos x - e^x - \sin x + 1 (x > 0)$, 则 $s'(x) = e^x + xe^x + \cos x - x\sin x - e^x - \cos x = xe^x - x\sin x = x(e^x - \sin x)$.

因为 $x > 0$, $e^x - \sin x > 0$, 所以 $s'(x) > 0$, 所以 $s(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $x \rightarrow 0^+$ 时, $s(x) \rightarrow 0^+$, 所以 $s(x) > 0$, 即 $\varphi'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{又 } \varphi(0) = \frac{0}{0},$$

由洛必达法则得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \cos x) = 2$, 所以 $a \leq 2$, 即实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$.

19. (1) 【解】由 $f(x) = \ln(x+1)$,

$$R(x) = \frac{ax}{1+bx},$$

$$\text{可知 } f'(x) = \frac{1}{x+1}, f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2},$$

$$R'(x) = \frac{a}{(1+bx)^2}, R''(x) = \frac{-2ab}{(1+bx)^3},$$

$$\text{则由 } f'(0) = R'(0), f''(0) = R''(0),$$

$$\text{可得 } \begin{cases} a=1, \\ -2ab=-1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=1, \\ b=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$(2) \text{【解】由 (1) 知, } R(x) = \frac{x}{1+\frac{1}{2}x} = \frac{2x}{x+2},$$

$$\text{令 } g(x) = f(x) - R(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2} (x > 0), \text{ 则 } g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0,$$

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 又当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow 0$, 所以当 $x > 0$ 时, $g(x) = f(x) - R(x) > 0$, 所以 $f(x) > R(x)$.

又当 $x > 0$ 时, $R(x) > 0$, 所以 $\frac{f(x)}{R(x)} > 1$.

又 $f(x) > kR(x)$ 对 $x > 0$ 恒成立, 所以 $k \leq 1$, 即实数 k 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

(3) 【证明】当 $x > 0$ 时, 由 (2) 可得

$$\ln(x+1) > \frac{2x}{x+2} > \frac{x}{x+1},$$

点悟: 运用 (2) 中结论对不等式进行放缩, 以便和要证的不等式建立关系

$$\text{所以 } \ln\left(\frac{1}{x}+1\right) > \frac{1}{x+1},$$

$$\text{令 } x = n, n+1, n+2, \dots, 2n-1, n \in \mathbf{N}_+,$$

$$\text{可得 } \ln\left(\frac{1}{n}+1\right) > \frac{1}{n+1}, \ln\left(\frac{1}{n+1}+1\right) > \frac{1}{n+2}, \dots, \ln\left(\frac{1}{2n-1}+1\right) > \frac{1}{2n},$$

$$\text{这 } n \text{ 个不等式左、右两边分别相加可得 } \ln\left(\frac{1}{n}+1\right) + \ln\left(\frac{1}{n+1}+1\right) + \dots + \ln\left(\frac{1}{2n-1}+1\right) > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \ln\left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1}\right) = \ln 2,$$

$$\text{得证.}$$

第六章高考强化

刷真题

1. D 【解析】由 $y = 5x + 8\ln x (x > 0)$ 求得 $y' = 5 + \frac{8}{x}$, 令 $x = 1$, 得 $y' = 13$, 即为切线的斜率. 故所求切线方程为 $y - 5 = 13(x - 1)$, 即 $y = 13x - 8$. 故选 D.

链接教材 本题是教材第 72 页例 4 的变式, 考查导数的几何意义. 在求曲线的切线方程时, 需要注意要求的是“在某点处”的切线方程, 还是“过某点”的切线方程. 二者区别是前者是切点, 后者不一定是切点, 需要另外设切点进行计算.

2. A 【解析】因为 $f(x) = \frac{e^x + 2\sin x}{1+x^2}$, 所以

$$f'(x) = \frac{(e^x + 2\cos x)(1+x^2) - 2x(e^x + 2\sin x)}{(1+x^2)^2},$$

所以 $f'(0) = 3$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线的方程为 $y = 3x + 1$, 当

$x = 0$ 时, $y = 1$; 当 $y = 0$ 时, $x = -\frac{1}{3}$. 则

所求三角形的面积 $S = \frac{1}{2} \times 1 \times$

$$\left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{6}. \text{ 故选 A.}$$

3. 4 【解析】由 $y = e^x + x + a$, 得 $y' = e^x + 1$.

设切点为 $P(x_0, y_0)$, 由直线 $y = 2x + 5$ 是曲线 $y = e^x + x + a$ 的一条切线, 得

$$\begin{cases} e^{x_0} + 1 = 2, \\ 2x_0 + 5 = e^{x_0} + x_0 + a, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x_0 = 0, \\ a = 4. \end{cases}$$

多种解法 设切点为 $P(x_0, y_0)$, 则当 $x = x_0$ 时, $y' = e^{x_0} + 1 = 2$, 所以 $x_0 = 0$, 因此 $y_0 = 2x_0 + 5 = 5$. 因为点 $P(0, 5)$ 在曲线 $y = e^x + x + a$ 上, 所以 $a = 4$.

归纳总结 已知曲线在某点处的切线方程求切点坐标或参数的一般步骤:

- ① 设出切点坐标;
- ② 利用导数或斜率公式求出切线斜率;
- ③ 利用切线斜率、点在切线上、点在曲线上列出方程(组);
- ④ 求出切点坐标或参数.

4. $\ln 2$ 【解析】令 $f(x) = e^x + x$, 则

$f'(x) = e^x + 1$, 所以曲线 $y = e^x + x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线斜率为 $f'(0) = 2$, 所以

切线方程为 $y = 2x + 1$. 令 $g(x) = \ln(x+1) + a$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x+1}$. 因为直线 $y =$

$2x + 1$ 也是曲线 $y = g(x)$ 的切线, 所以

令 $\frac{1}{x+1} = 2$, 解得 $x = -\frac{1}{2}$, 则曲线 $y =$

$g(x)$ 与直线 $y = 2x + 1$ 的切点坐标为 $(-\frac{1}{2}, 0)$, 所以 $0 = a - \ln 2$, 解得 $a = \ln 2$.

5. (1) 【证明】已知 $\frac{a_{n+1}}{n} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$,

等式两边同乘 $n(n+1)$, 得 $(n+1) \cdot a_{n+1} = na_n + 1$,

即 $(n+1)a_{n+1} - na_n = 1$, 又因为 $a_1 = 3$, 所以数列 $\{na_n\}$ 是首项为 3, 公差为 1 的等差数列.

(2) 【解】由 (1) 知, $na_n = 3 + (n-1) \times 1 = n+2$.

因为 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$, 所以 $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + ma_m x^{m-1}$,

则 $f''(x) = 3 + 4x + 5x^2 + \dots + (m+2) \cdot x^{m-1}$, ①

所以 $xf''(x) = 3x + 4x^2 + 5x^3 + \dots + (m+2) \cdot x^m$, ②

①-②, 得 $(1-x)f''(x) = 3 + (x+x^2+\dots+x^{m-1}) - (m+2)x^m = 3 + \frac{x(1-x^{m-1})}{1-x} - (m+2)x^m$.

当 $x = -2$ 时, $3f'(-2) = 3 +$

$$\frac{-2[1-(-2)^{m-1}]}{1-(-2)} - (m+2) \cdot (-2)^m,$$

$$\text{故 } f'(-2) = \frac{7}{9} - \frac{3m+7}{9} \cdot (-2)^m.$$

多种解法 (2) 由 (1) 知, $na_n = 3 + (n-1) \times 1 = n+2$.

因为 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_mx^m$, 所以 $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + ma_mx^{m-1}$,
所以 $f'(-2) = a_1 + 2a_2 \cdot (-2) + 3a_3 \cdot (-2)^2 + \dots + ma_m \cdot (-2)^{m-1} = 3 + 4 \times (-2) + 5 \times (-2)^2 + \dots + (m+2) \cdot (-2)^{m-1}$.

$$\text{而 } (m+2) \cdot (-2)^{m-1} = \frac{3(m-1)+7}{9} \cdot (-2)^{m-1}.$$

$$(-2)^{m-1} - \frac{3m+7}{9} \cdot (-2)^m, \text{ 所以}$$

$$f'(-2) = \frac{3 \times 0 + 7}{9} \times (-2)^0 - \frac{3 \times 1 + 7}{9} \times$$

$$(-2)^1 + \frac{3 \times 1 + 7}{9} \times (-2)^1 - \frac{3 \times 2 + 7}{9} \times$$

$$(-2)^2 + \dots + \frac{3(m-1)+7}{9} \cdot (-2)^{m-1} -$$

$$\frac{3m+7}{9} \cdot (-2)^m = \frac{3 \times 0 + 7}{9} \times (-2)^0 -$$

$$\frac{3m+7}{9} \cdot (-2)^m = \frac{7}{9} - \frac{3m+7}{9} \cdot (-2)^m.$$

6. C 【解析】 $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x}$, 由 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 单调递增可知, 当 $x \in (1, 2)$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立.
当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, 不符合题意.

当 $a > 0$ 时, 设 $h(x) = ae^x - \frac{1}{x}$, 则

$$h'(x) = ae^x + \frac{1}{x^2} > 0, \text{ 则 } h(x) \text{ 在 } (1, 2) \text{ 单}$$

调递增, 所以只需 $f'(1) = h(1) = ae^1 - 1 \geq 0$, 解得 $a \geq e^{-1}$, 故选 C.

多种解法 由题意可知 $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x} \geq 0$ 在区间 $(1, 2)$ 上恒成立, 即

$$a \geq \frac{1}{xe^x}, x \in (1, 2).$$

设 $g(x) = xe^x$, 则 $g'(x) = (x+1)e^x > 0$ 在 $(1, 2)$ 上恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增, $e < xe^x < 2e^2$, 所以 $\frac{1}{e} >$

$$\frac{1}{xe^x} > \frac{1}{2e^2}, \text{ 即 } a \geq e^{-1}, \text{ 故选 C.}$$

$$7. \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1 \right)$$

思路导引 求出 $f'(x) - f''(x) \geq 0$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立 $\rightarrow$ 进一步转化为 $\frac{\ln a}{\ln(1+a)} \geq -\left(\frac{1+a}{a}\right)^x \rightarrow$ 由指数函

数的单调性求出 $-\left(1+\frac{1}{a}\right)^x$ 的取值范围 $\rightarrow$ 由对数函数的单调性建立关于 a 的不等式 $\rightarrow a$ 的取值范围

【解析】由 $f(x) = a^x + (1+a)^x$,

得 $f'(x) = a^x \ln a + (1+a)^x \cdot \ln(1+a)$, 则由题意知不等式 $a^x \ln a + (1+a)^x \ln(1+a) \geq 0$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立.

因为 $a \in (0, 1)$, 所以 $1+a \in (1, 2)$,

则 $\ln(1+a) > 0$, 所以不等式 $\frac{\ln a}{\ln(1+a)} \geq$

$$-\left(\frac{1+a}{a}\right)^x \text{ 对任意 } x \in (0, +\infty) \text{ 恒成立.}$$

因为 $1 + \frac{1}{a} > 1$, 所以当 $x \in (0, +\infty)$

$$\text{时, } \left(1 + \frac{1}{a}\right)^x > 1, -\left(1 + \frac{1}{a}\right)^x < -1,$$

$$\text{所以 } \frac{\ln a}{\ln(1+a)} \geq -1, \text{ 即 } \ln a \geq -\ln(1+a),$$

$$\ln a \geq \ln \frac{1}{1+a},$$

所以 $a \geq \frac{1}{1+a}$, 即 $a^2 + a - 1 \geq 0$, 解得 $a \leq$

$$\frac{-\sqrt{5}-1}{2} \text{ (舍去) 或 } a \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

又 $a \in (0, 1)$, 所以 a 的取值范围是

$$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1 \right).$$

多种解法 由题可得 $f'(x) = a^x \ln a +$

$(1+a)^x \ln(1+a) \geq 0$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 令 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) =$

$a^x (\ln a)^2 + (1+a)^x [\ln(a+1)]^2$, 可得 $g'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $g(x)$ 即 $f'(x)$

在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以只需 $f'(0) = \ln a + \ln(a+1) \geq 0$ 即可, 化简

$$\text{得 } a^2 + a - 1 \geq 0, \text{ 解得 } a \leq \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \text{ 或}$$

$$a \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 又 } a \in (0, 1), \text{ 所以 } a \text{ 的取}$$

$$\text{值范围是 } \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1 \right).$$

8. B 【解析】方法一: 由 $f(x) = \frac{x+2}{e^x+a}$ 求得

$$\text{得 } f'(x) = \frac{e^x + a - (x+2)e^x}{(e^x+a)^2} = \frac{-(x+1)e^x + a}{(e^x+a)^2}.$$

因为 $f(x)$ 的最大值为 1, 所以存在 x_0 , 使得 $f(x_0) = 1$ 且 $f'(x_0) = 0$,

$$\text{即有 } \begin{cases} f(x_0) = \frac{x_0+2}{e^{x_0}+a} = 1, & \text{①} \\ -(x_0+1)e^{x_0} + a = 0. & \text{②} \end{cases} \text{ 由①得 } x_0 +$$

$$2 = e^{x_0} + a, \text{ 由②得 } a = (x_0+1)e^{x_0}, \text{ 所以}$$

$$x_0+2 = e^{x_0} + (x_0+1)e^{x_0}, \text{ 即 } (x_0+2)(e^{x_0}-1) = 0,$$

$$\text{解得 } e^{x_0} = 1 \text{ 或 } x_0+2 = 0, \text{ 即 } x_0 = 0 \text{ 或}$$

$$x_0 = -2. \text{ 当 } x_0 = 0 \text{ 时, } a = 1, \text{ 经验证, 符合}$$

$$\text{题意; 当 } x_0 = -2 \text{ 时, } f(x_0) = 0, \text{ 不符合}$$

$$\text{题意, 故舍去. 所以 } a = 1. \text{ 故选 B.}$$

$$\text{方法二: 设 } e^x = t (t > 0), \text{ 则 } x = \ln t, \text{ 则}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{e^x+a} \text{ 表示曲线 } y = \ln t \text{ 上一点 } (t, \ln t) \text{ 与点 } (-a, -2) \text{ 的连线的斜率.}$$

结合选项知 $a > 0$, 则 $-a < 0$, 故当过点

$(-a, -2)$ 的直线与曲线 $y = \ln t$ 相切时, 斜率取得最大值, 即 $f(x)$ 取得最大值.

$$\text{由 } y' = \frac{1}{t} = 1, \text{ 得 } t = 1, \text{ 所以切点坐标为}$$

$$(1, 0), \text{ 则 } \frac{0+2}{1+a} = 1, \text{ 解得 } a = 1. \text{ 故选 B.}$$

方法三: 观察题目中的四个选项可知,

$$a > 0, \text{ 所以 } e^x + a > 0, \text{ 又 } \frac{x+2}{e^x+a} \leq 1, \text{ 所以 } x +$$

$$2 \leq e^x + a, \text{ 则 } a \geq x + 2 - e^x. \text{ 令 } y = x + 2 - e^x,$$

$$\text{则 } y' = 1 - e^x. \text{ 令 } y' = 0, \text{ 解得 } x = 0, \text{ 当 } x <$$

$$0 \text{ 时, } y' > 0, \text{ 此时 } y = x + 2 - e^x \text{ 单调递增;}$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } y' < 0, \text{ 此时 } y = x + 2 - e^x \text{ 单调}$$

$$\text{递减, 所以 } y \text{ 在 } x = 0 \text{ 处取得最大值, 且}$$

$$y_{\max} = 1, \text{ 所以 } a \geq 1. \text{ 又因为 } \frac{x+2}{e^x+a} \leq 1 \text{ 能}$$

$$\text{取到等号, 即 } a \geq x + 2 - e^x \text{ 能取到等号,}$$

$$\text{所以 } a \text{ 只能取 } 1. \text{ 故选 B.}$$

$$\text{快解 观察函数 } f(x) \text{ 的解析式, 发现分母含有指数式 } e^x, \text{ 而函数的最大}$$

$$\text{值为 } 1, \text{ 且选项中含 } e, \text{ 所以要使 } \frac{x+2}{e^x+a} = 1 \text{ 中的 } e \text{ 消失, 即令 } e^x = 1, \text{ 得}$$

$$x = 0, \text{ 所以 } f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 处取得最大值,}$$

$$\text{所以 } f(0) = \frac{0+2}{e^0+a} = 1, \text{ 解得 } a = 1, \text{ 经检}$$

$$\text{验, } a = 1 \text{ 符合题意. 故选 B.}$$

9. ABD 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(0) = 0$, 故 A 正确; 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 因此 $f(-x) =$

$$[(-x)^2 - 3]e^{-x} + 2 = -f(x), \text{ 因此 } f(x) =$$

$$-(x^2 - 3)e^{-x} - 2, \text{ 故 B 正确; 当 } x > 0 \text{ 时,}$$

$$f(x) = (x^2 - 3)e^x + 2, f'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x = (x+3)(x-1) \cdot e^x, \text{ 令 } f'(x) > 0, \text{ 得}$$

$$x > 1, \text{ 令 } f'(x) < 0, \text{ 得 } 0 < x < 1, \text{ 因此 } f(x) \text{ 在}$$

$$x = 1 \text{ 处取得极大值, 因此奇函数 } f(x) \text{ 在 } x = -1 \text{ 处取得极大值, 故 D 正确;}$$

$$\text{故 A、B、D 正确. 故选 ABD.}$$

$$\text{故 A、B、D 正确. 故选 ABD.}$$

$$\text{故 A、B、D 正确. 故选 ABD.}$$

$$\text{故 A、B、D 正确. 故选 ABD.}$$

$$\text{故 A、B、D 正确. 故选 ABD.}$$

$$\text{故 A、B、D 正确. 故选 ABD.}$$

$$\text{故 A、B、D 正确. 故选 ABD.}$$

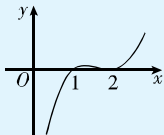
$1)^2(-2x+2)>0$, 得 $x<1$, 所以当 $-1<x<0$ 时, $f(2-x)>f(x)$ 成立, **D 正确**.
故选 ACD.

11. -4 【解析】因为 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)=x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a$, 所以 $f'(x)=3x^2-2(a+3)x+3a+2$.

因为 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点, 所以 $f'(2)=12-4(a+3)+3a+2=0$, 解得 $a=2$, 经检验, 符合题意, 所以 $f(x)=(x-1)(x-2)^2$, 所以 $f(0)=-4$.

多种解法 $f'(x)=(x-2)(x-a)+(x-1)(x-a)+(x-1)(x-2)$, 因为 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点, 所以 $f'(2)=2-a=0$, 得 $a=2$, 经检验, 符合题意, 所以 $f(x)=(x-1)(x-2)^2$, 所以 $f(0)=-4$.

快解 (数形结合法) 因为 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点, 所以由数轴标根法可得 $a=2$, 作出 $f(x)$ 的图象如图所示, 所以 $a=2$ 符合题意, 则 $f(x)=(x-1)(x-2)^2$, 所以 $f(0)=-4$.



12. (-2, 1) 【解析】令 $x^3-3x=-(x-1)^2+a$, 则 $a=x^3-3x+(x-1)^2$, 设 $\varphi(x)=x^3-3x+(x-1)^2$, 求导得 $\varphi'(x)=3x^2+2x-5=(3x+5)(x-1)$, 令 $\varphi'(x)=0$, 得 $x=-\frac{5}{3}$ 或 $x=1$, 因为 $x>0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减. 因为曲线 $y=x^3-3x$ 与 $y=-(x-1)^2+a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的交点, 所以直线 $y=a$ 与函数 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的图象有两个交点. 因为 $\varphi(0)=1$, $\varphi(1)=-2$, 当 $x\rightarrow+\infty$ 时, $\varphi(x)\rightarrow+\infty$, 所以 a 的取值范围为 $(-2, 1)$.

13. ①②③④ 【解析】设 $g(x)=x^2-\cos x-c^2$, 定义域为 $\mathbf{R}$, 则 $g(-x)=(-x)^2-\cos(-x)-c^2=x^2-\cos x-c^2=g(x)$, 所以 $g(x)$ 为偶函数, 图象关于 y 轴对称.
 $g'(x)=2x+\sin x$, 当 $x>0$ 时, $g'(x)>0$ 恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $g(x)$ 为偶函数, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 则 $g(0)=-1-c^2$ 是 $g(x)$ 的极小值, 也是最小值.
又 $x\rightarrow+\infty$ 时, $g(x)\rightarrow+\infty$, 所以 $g(x)$

悟: 根据 $y=\cos x$ 的有界性, 当 $x\rightarrow+\infty$ 时, $g(x)$ 图象的变化趋势近似于 $y=x^2$ 图象的变化趋势的大致图象如图①所示, 所以 $f(x)$ 的大致图象如图②所示.

对于①, 结合 $f(x)$ 的图象, 因为 -1 和 1 关于原点对称, 所以 $f(x)$ 在 $(-1,$

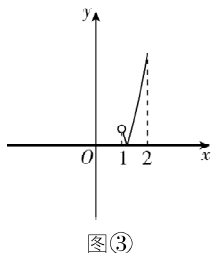
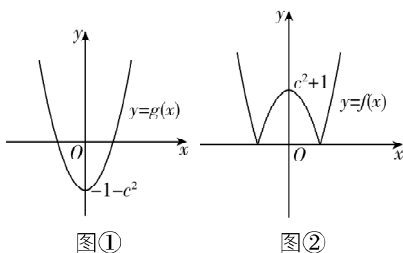
$1]$ 上一定有最大值和最小值, 故①正确;

对于②, 当 $c=0$ 时, $f(x)$ 的极大值是 1 , 结合图象可知 $f(x)=1$ 有 3 个解, 故②正确;

对于③, 当 $c=1$ 时, $f(x)=1x^2-\cos x-1$, $g(x)=x^2-\cos x-1$, 由前面的分析知 $g(x)$ 在 $(1, 2]$ 上单调递增, 且 $g(1)=-\cos 1\in(-1, 0)$, $g(2)=3-\cos 2>3$, 所以 $f(1)=1g(1)<f(2)=1g(2)$, 所以当 $c=1, x\in(1, 2]$ 时, $f(x)$ 的大致图象如图③所示, 则 $f(x)$ 有最大值, 且在 $x=2$ 处取得, 故③正确;

对于④, 因为 $f(x)$ 的极大值是 c^2+1 , 又 $c>0$, 则 $c^2+1>c$ 恒成立, 所以结合图象可知 $f(x)$ 的图象与直线 $y=c$ 有 4 个交点, 故④正确.

综上, 正确结论的序号是①②③④.



14. 【解】(1) 由题知, $f'(x)=(1+x)e^x+a$, 则 $f'(0)=1+a$, 又 $f(0)=b$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y-b=(1+a)(x-0)$, 即 $y=(1+a)x+b$, 由题知 $\begin{cases} 1+a=-2, \\ b=1, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} a=-3, \\ b=1. \end{cases}$

(2) 由(1)知 $f(x)=xe^x-3x+1$. 当 $x>0$ 时, $f(x+m)-f(x)>m$, 即 $f(x+m)-(x+m)>f(x)-x$.

令 $g(x)=f(x)-x=xe^x-4x+1(x>0)$, 则 $g'(x)=(x+1)e^x-4$,

令 $\varphi(x)=g'(x)$, 则 $\varphi'(x)=(x+2)e^x$, 当 $x>0$ 时, $\varphi'(x)>0$, $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 即 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $g'(0)=-3<0$, $g'(1)=2e-4>0$, 所以存在唯一实数 $x_0\in(0, 1)$, 使 $g'(x_0)=0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $g(0)=1$.

因为 $f(x+m)-(x+m)>f(x)-x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $g(x+m)>g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 令 $g(x)=1$, 则 $xe^x-4x+1=1$, 解得 $x=0$ 或 $x=2\ln 2$, 所以 m 的取值范围为 $[2\ln 2, +\infty)$.

(3) 令 $h(x)=f(x+k)+f(k-x)-2f(k)$, 则 $h(0)=0$, $h'(x)=f'(x+k)-f'(k-x)$, 则 $h'(0)=0$.

令 $m(x)=h'(x)$, $r(x)=f'(x)$, 则 $r'(x)=(x+2)e^x$, 故 $m'(x)=r'(x+k)+r'(k-x)$.

令 $m'(0)\geq 0$, 则 $2r'(k)\geq 0$, 即 $k+2\geq 0$, 即 $k\geq -2$,

则当 $x>0$ 时, $m'(x)>0$, 此时 $h'(x)$ 单调递增.

又 $h'(0)=0$, 则当 $x>0$ 时, $h'(x)>0$, $h(x)$ 单调递增,

又 $h(0)=0$, 则当 $x>0$ 时, $h(x)>0$, 则 $f(x+k)+f(k-x)>2f(k)$.

所以 $k\geq -2$, 因此 k 的最小值为 -2 .

15. 【解】(1) 根据所给切线方程可知, $f'(-1)=-\frac{4}{e^2}$.

因为 $f(x)=x^2+mx-4e^{nx-1}$, 所以 $f'(x)=2x+m-4n\cdot e^{nx-1}$, 可得 $f'(-1)=-2+m-4ne^{-n-1}$,

所以 $-2+m-4ne^{-n-1}=-\frac{4}{e^2}$,

则 $\begin{cases} -2+m=0, \\ 4n=4, \\ -n-1=-2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=2, \\ n=1. \end{cases}$

(2) 由(1)可知, $f(x)=x^2+2x-4e^{x-1}$, $f'(x)=2x+2-4e^{x-1}$.

令 $f_1(x)=2x+2$,

$f_2(x)=4e^{x-1}$, 在同

一平面直角坐标

系中分别作出 $y=$

$f_1(x)$, $y=f_2(x)$ 的

图象, 如图所示.

由 $f'(-1)=-\frac{4}{e^2}<$

0 , $f'(0)=2-\frac{4}{e}>0$, $f'(1)=0$, $f'(2)=$

$6-4e<0$, 结合图象可知 $y=f_1(x)$ 的图象与 $y=f_2(x)$ 的图象有 2 个交点, 设其横坐标分别为 $a, b(a<b)$, 则 $a\in(-1, 0)$, $b=1$.

当 $x\rightarrow-\infty$ 时, $2x+2\rightarrow-\infty$, $4e^{x-1}\rightarrow 0^+$, 此时 $f'(x)\rightarrow-\infty$;

当 $x\rightarrow+\infty$ 时, $2x+2\rightarrow+\infty$, $4e^{x-1}\rightarrow+\infty$, 而 $y=4e^{x-1}$ 的增长速度大于 $y=2x+2$ 的增长速度, 故 $f'(x)\rightarrow-\infty$.

当 $x\in(-\infty, a)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x\in(a, 1)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x\in(1, +\infty)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极小值, 在 $x=1$ 处取得极大值, 故 $f(x)$ 的极值点个数为 2 .

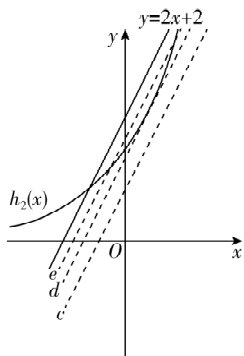
(3) 令 $g(x)=f(x)-kx+1=x^2+(2-k)x-4e^{x-1}+1$, 则 $g'(x)=2x+2-k-4e^{x-1}$, 直线 $y=kx-1(k>0)$ 与曲线 $y=f(x)$ 的交点个数即为 $g(x)$ 的零点个数.

令 $h_1(x) = 2x + 2 - k$, $h_2(x) = 4e^{x-1}$. 由(2)可知, $y = h_1(x)$ 的图象与 $y = h_2(x)$ 的图象的交点个数可以是 0, 1 或 2.

悟: (2) 对应 $k=0$ 的特殊情况, 上、下移动 $y=f_1(x)$ 的图象, 即可知 $y=h_1(x)$ 与 $y=h_2(x)$ 图象的交点个数.

当 $y=h_1(x)$ 的图象与 $y=h_2(x)$ 的图象恰有 1 个交点时, 直线 $y=h_1(x)$ 为曲线 $y=h_2(x)$ 的切线, 此时切点的横坐标 x 满足 $h_2'(x) = 2$, 即 $4e^{x-1} = 2$, 解得 $x = 1 - \ln 2$, 代入 $h_2(x)$, 得 $h_2(1 - \ln 2) = 4e^{1-\ln 2-1} = 2$, 所以 $h_1(x)$ 与 $h_2(x)$ 图象的切点坐标为 $(1 - \ln 2, 2)$, 将其代入 $h_1(x)$, 得 $h_1(1 - \ln 2) = 2(1 - \ln 2) + 2 - k = 2$, 故 $k = 2 - 2\ln 2$.

(i) 当 $k \in (2 - 2\ln 2, +\infty)$ 时, 如图①直线 c , 易知 $y = h_1(x)$ 的图象与 $y = h_2(x)$ 的图象没有交点, $g'(x) = 2x + 2 - k - 4e^{x-1} = h_1(x) - h_2(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 单调递减, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$. 又 $g(0) = 1 - \frac{4}{e} < 0$, 故存在唯一的 $x_1 \in (-\infty, 0)$, 使得 $g(x_1) = 0$. 此时直线 $y = kx - 1 (k > 0)$ 与曲线 $y = f(x)$ 的交点个数为 1.



图①

(ii) 当 $k = 2 - 2\ln 2$ 时, 如图①直线 d , $y = h_1(x)$ 的图象与 $y = h_2(x)$ 的图象仅有 1 个交点, $g'(x) = 2x + 2 - k - 4e^{x-1} = h_1(x) - h_2(x) \leq 0$, 当且仅当 $x = 1 - \ln 2$ 时等号成立.

所以当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $g'(x) \leq 0$, $g(x)$ 单调递减.

又当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$, $g(0) = 1 - \frac{4}{e} + 1 < 0$, 同理, 函数 $g(x)$ 有 1 个零点.

此时直线 $y = kx - 1 (k > 0)$ 与曲线 $y = f(x)$ 的交点个数为 1.

(iii) 当 $k \in (0, 2 - 2\ln 2)$ 时, 如图①直线 e , $y = h_1(x)$ 的图象与 $y = h_2(x)$ 的图象有 2 个交点, 设这 2 个交点的横坐标分别为 $x_2, x_3 (x_2 < x_3)$. 由(2)可知, x_2, x_3 还进一步满足 $-1 < a < x_2 < 1 - \ln 2 < x_3 < 1$.

当 $x \in (-\infty, x_2)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

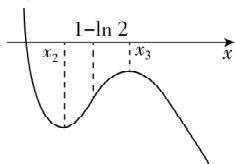
当 $x \in (x_2, x_3)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

当 $x \in (x_3, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$

单调递减.

故 $g(x)$ 在 $x = x_2$ 处取得极小值, 在 $x = x_3$ 处取得极大值.

又 $g(1 - \ln 2) = (1 - \ln 2)^2 + (2 - k)(1 - \ln 2) - 1 > (1 - \ln 2)^2 + (1 - \ln 2) \cdot 2\ln 2 - 1 = -(\ln 2)^2 < 0$, 所以 $g(x_2) < 0$, 由 $g'(x_3) = 0$ 可得 $2x_3 + 2 - k - 4e^{x_3-1} = 0$, 解得 $k = 2x_3 + 2 - 4e^{x_3-1}$, 则 $g(x_3) = x_3^2 + (2 - k)x_3 - 4e^{x_3-1} + 1 = x_3^2 + (-2x_3 + 4e^{x_3-1}) \cdot x_3 - 4e^{x_3-1} + 1 = -x_3^2 + 4e^{x_3-1}(x_3 - 1) + 1 = (x_3 - 1)(4e^{x_3-1} - x_3 - 1)$, 因为 $1 - \ln 2 < x_3 < 1$, 所以 $x_3 - 1 < 0$. 令 $\varphi(x) = 4e^{x-1} - x - 1, x > 0$, 则 $\varphi'(x) = 4e^{x-1} - 1$, 又 $x > 0$, 所以 $\varphi'(x) > \frac{4}{e} - 1 > 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 则 $\varphi(x_3) > \varphi(1 - \ln 2) = \ln 2 > 0$, 所以 $g(x_3) < 0$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$, 故 $g(x)$ 的大致图象如图②所示, 故函数 $g(x)$ 有 1 个零点,



图②

此时直线 $y = kx - 1 (k > 0)$ 与曲线 $y = f(x)$ 的交点个数为 1.

综上所述, 当 $k > 0$ 时, 直线 $y = kx - 1 (k > 0)$ 与曲线 $y = f(x)$ 的交点个数为 1.

16. (1) 【证明】 由 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3$, 得 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - 3kx^2 = \frac{x^2}{x+1} - 3kx^2 = x^2 \left(\frac{1}{x+1} - 3k \right)$.

当 $x > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_0 = \frac{1}{3k}$.

1. 因为 $0 < k < \frac{1}{3}$, 所以 $0 < 3k < 1$, 则

$$x_0 = \frac{1}{3k} - 1 > 0.$$

当 $0 < x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一的极大值点 $x_0 = \frac{1}{3k} - 1$.

因为 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 且 $f(x_0) > f(0) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上有唯一的零点, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一的零点.

(2) (i) 【证明】 $g(t) = f(x_1 + t) - f(x_1 - t)$, 且由(1)知 $x_1 = x_0 = \frac{1}{3k} - 1$, 则

$$3k = \frac{1}{x_1 + 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{则 } g'(t) &= f'(x_1 + t) + f'(x_1 - t) \\ &= (x_1 + t)^2 \left(\frac{1}{x_1 + t + 1} - 3k \right) + (x_1 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &t)^2 \left(\frac{1}{x_1 - t + 1} - 3k \right) \\ &= (x_1 + t)^2 \left(\frac{1}{x_1 + t + 1} - \frac{1}{x_1 + 1} \right) + (x_1 - \\ &t)^2 \left(\frac{1}{x_1 - t + 1} - \frac{1}{x_1 + 1} \right) \\ &= (x_1 + t)^2 \cdot \frac{-t}{(x_1 + t + 1)(x_1 + 1)} + (x_1 - \\ &t)^2 \cdot \frac{t}{(x_1 - t + 1)(x_1 + 1)} \\ &= \frac{-t[(x_1 + t)^2(x_1 - t + 1) - (x_1 - t)^2(x_1 + t + 1)]}{(x_1 + t + 1)(x_1 - t + 1)(x_1 + 1)} \\ &= \frac{-t[(x_1 + t)(x_1^2 - t^2) + (x_1 + t)^2 - (x_1 - t)(x_1^2 - t^2) - (x_1 - t)^2]}{(x_1 + t + 1)(x_1 - t + 1)(x_1 + 1)} \\ &= \frac{-t[2t(x_1^2 - t^2) + 4x_1 t]}{(x_1 + t + 1)(x_1 - t + 1)(x_1 + 1)} \\ &= \frac{-2t^2(x_1^2 - t^2 + 2x_1)}{(x_1 + t + 1)(x_1 - t + 1)(x_1 + 1)}, \end{aligned}$$

因为 $t \in (0, x_1)$ 时, $x_1^2 - t^2 + 2x_1 > 0$, $(x_1 + t + 1)(x_1 - t + 1)(x_1 + 1) > 0$, $-2t^2 < 0$, 所以 $g'(t) < 0$,

则 $g(t)$ 在区间 $(0, x_1)$ 上单调递减.

(ii) 【解】 $2x_1 > x_2$, 证明如下:

由(i)知 $g(t)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减, 则 $g(x_1) < g(0) = f(x_1 + 0) - f(x_1 - 0) = 0$, 所以 $g(x_1) = f(x_1 + x_1) - f(x_1 - x_1) = f(2x_1) - f(0) = f(2x_1) - 0 = f(2x_1) < 0$. 因为 x_2 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点, 所以 $f(x_2) = 0$, 即 $f(2x_1) < f(x_2)$. 由(1)知 $x_2 \in (x_1, +\infty)$, 且 $f(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $2x_1 > x_2$.

刷原创

1. A 【解析】 设 $P_0(x_0, y_0)$, 其中 $x_0 > 0$,

$$\text{对 } y = 2\ln x + \frac{1}{x} \text{ 求导得 } y' = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2},$$

因为曲线 $y = 2\ln x + \frac{1}{x}$ 在点 P_0 处的切线平行于直线 $y = x$, 所以在点 P_0 处的切线的斜率为 1, 所以 $\frac{2}{x_0} - \frac{1}{x_0^2} = 1$.

$$\text{所以 } x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0,$$

$$\text{所以 } (x_0 - 1)^2 = 0, \text{ 解得 } x_0 = 1.$$

将 $x_0 = 1$ 代入方程 $y = 2\ln x + \frac{1}{x}$ 中得

$$y = 2\ln 1 + \frac{1}{1} = 0 + 1 = 1, \text{ 即 } y_0 = 1,$$

因此点 P_0 的坐标为 $(1, 1)$. 故选 A.

2. D 【解析】 因为 $a = \frac{2\sqrt{e}}{3} > 0, b = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} >$

$$0, \text{ 且 } \frac{a}{b} = \frac{\frac{2\sqrt{e}}{3}}{\frac{3}{\sqrt{2\pi}}} = \frac{2\sqrt{2\pi e}}{9} < 1, \text{ 所以 } a < b.$$

令 $h(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$, 则 $h'(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

则 $h(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,
又 $h(1) = 0$, 则 $h(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

即 $x > 1$ 时, $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$ 恒成立,

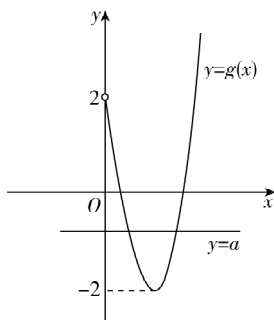
令 $x = 2$, 则 $\ln 2 > \frac{2 \times (2-1)}{2+1} = \frac{2}{3}$, 所以 $c = 3(1 - \ln 2) < 1$.

又 $a = \frac{2\sqrt{e}}{3} > 1$, 所以 $a > c$. 综上所述, $c < a < b$. 故选 D.

3. (-2, 2) 【解析】 由 $x^3 - 3x = a - 2(x-1)^2$, 即 $a = x^3 + 2x^2 - 7x + 2$.

令 $g(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 2$, 则 $g'(x) = 3x^2 + 4x - 7 = (3x+7)(x-1)$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 且 $g(0) = 2$, $g(1) = -2$, 作出 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的大致图象如图所示.

方程 $x^3 - 3x = a - 2(x-1)^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的实数解, 等价于直线 $y = a$ 与曲线 $y = g(x)$ 有两个交点, 所以 $a \in (-2, 2)$.



4. 【证明】 (1) 由题得, $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = 1 - ae^x$, 则当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x < -\ln a$, 由 $f'(x) < 0$ 得 $x > -\ln a$, 故函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递增, 在区间 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递减.

由 $g(x) = \ln x - ax, x > 0$ 得 $g'(x) = \frac{1}{x} - a$, 则由 $g'(x) > 0$ 得 $0 < x < \frac{1}{a}$, 由 $g'(x) < 0$

得 $x > \frac{1}{a}$, 故函数 $g(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{a})$ 上

单调递增, 在区间 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减.

设 $y = \frac{1}{a} + \ln a$ ($0 < a < 1$), 则 $y' = -\frac{1}{a^2} +$

$\frac{1}{a} = \frac{a-1}{a^2}$, 当 $0 < a < 1$ 时, $y' < 0$, 则 $y =$

$\frac{1}{a} + \ln a$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 当 $a \rightarrow 1$

时, $y \rightarrow 1$, 所以 $\frac{1}{a} > -\ln a$, 所以在 $g(x)$

的单调递减区间上, $f(x)$ 也单调递减.

(2) 由 $f(x) = 0, g(x) = 0$ 分别得 $a =$

$\frac{x}{e^x}, a = \frac{\ln x}{x}$, 因此函数 $f(x), g(x)$ 共有

3 个不同的零点, 即直线 $y = a$ 与曲线

$F(x) = \frac{x}{e^x}, G(x) = \frac{\ln x}{x}$ 共有 3 个交点,

只需证这 3 个交点的横坐标依次成等比数列.

由 $F'(x) = \frac{1-x}{e^x}, G'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ 知, 当

$F'(x) = 0$ 时, $x = 1$, 当 $G'(x) = 0$ 时, $x = e$, 则函数 $F(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 函数 $G(x)$ 在区间 $(0, e)$ 上单调递增, 在区间 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 故 $G(x)_{\max} = F(x)_{\max} = \frac{1}{e}$.

故 $y = F(x) - G(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减, 且 $F(1) - G(1) > 0, F(e) - G(e) < 0$, 由函数零点存在定理知, 存在唯一实数 $x_0 \in (1, e)$, 使 $F(x) = G(x)$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x) \rightarrow 0, G(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $F(x) \rightarrow 0, G(x) \rightarrow 0$, 所以直线 $y = a$ 与曲线 $F(x), G(x)$ 过同一点 (x_0, a) .

设直线 $y = a$ 与曲线 $F(x) = \frac{x}{e^x}$ 的另一

交点为 (x_1, a) , 与曲线 $G(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的

另一交点为 (x_2, a) , 则 $0 < x_1 < 1 < x_0 < e <$

$x_2, \frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{x_0}{e^{x_0}} = a = \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{\ln x_2}{x_2}$.

故 $\frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{\ln x_0}{e^{\ln x_0}}$, 即 $F(x_1) = F(\ln x_0)$,

又 $\ln x_0 \in (0, 1)$, 则由函数 $F(x)$ 的单

调性得 $x_1 = \ln x_0$. 同理, 由 $\frac{x_0}{e^{x_0}} = \frac{\ln x_2}{x_2} =$

$\frac{\ln e^{x_0}}{e^{x_0}}$ 得 $x_2 = e^{x_0}$. 故 $x_1 x_2 = e^{x_0} \ln x_0 = x_0^2$.

综上, 函数 $f(x), g(x)$ 的 3 个零点从小到大依次成等比数列.

专练 1 新情境、新定义专练

刷素养

1. A 【解析】 1 至 2 039 这 2 039 个整数中, 被 2 除余 1 且被 3 除余 2 的数, 按从小到大的顺序排成一列, 把这列数记为数列 $\{a_n\}$,

则数列 $\{a_n\}$ 是一个以 5 为首项, 6 为公差

的等差数列, 所以 $a_n = 5 + (n-1) \cdot 6 = 6n-1$ ($1 \leq n \leq 340, n \in \mathbf{N}_+$),

故 $b_n = (\sqrt{2})^{a_n} = (\sqrt{2})^{6n-1}$.

故 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(\sqrt{2})^{6n+5}}{(\sqrt{2})^{6n-1}} = (\sqrt{2})^6 = 8$. 故选 A.

2. ACD 【解析】 对于 A, 由题意知 $b_{n+3} + b_n = 4, b_{n+6} + b_{n+3} = 4$, 两式相减, 得 $b_{n+6} = b_n$, 故 A 正确;

对于 B, $b_4 + b_1 = b_5 + b_2 = b_6 + b_3 = 4$, 又 $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 6 项依次为 1, 2, 3, 3, 2, 1, 均不为 0, 又 $b_{n+6} = b_n$, 故 B 错误;

对于 C, 由 $b_{n+6} = b_n$ 可得 $S_{12n} = 2S_{6n}$, 即

当 $p = 6n$ 时, 均有 $S_{2p} = 2S_p$, 故 C 正确;

对于 D, $B_{n+3} = 1 \cdot b_{n+3} - 2 \cdot 1 = 1 \cdot (4 - b_n) - 2 \cdot 1 = 1 \cdot b_n - 2 \cdot 1 = B_n$, 且 $\{B_n\}$ 的前 3 项依次为 1, 0, 1,

记 $\{B_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则由周期性可得 $T_{3n} = 2n, T_{3n+1} = T_{3n+2} = 2n+1$,

当 $\{B_n\}$ 的前 m 项和为 2 026 $= 2 \times 1 013$ 时, $m = 3 \times 1 013 = 3 039$, 故 D 正确. 故选 ACD.

3. BCD 【解析】 对于 A, 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q, q > 1$, 则 $a_{n+k} - a_n = a_1 q^{n+k-1} - a_1 q^{n-1} = a_1 q^{n-1} (q^k - 1)$,

其中 $q^k > 1$, 则 $q^{n-1} (q^k - 1) > 0$, 若 $a_1 < 0$, 则 $a_{n+k} - a_n < 0$, 即 $a_{n+k} < a_n$, 不符合定义, 故 A 错误.

对于 B, $a_{n+k} - a_n = [2(n+k) + (-1)^{n+k}] - [2n + (-1)^n] = 2k + (-1)^n [(-1)^k - 1]$, 当 n 为奇数时, $a_{n+k} - a_n = 2k - (-1)^{k+1} + 1$, 因为 $-(-1)^{k+1} \geq 0$,

所以存在正整数 k ($k \geq 2$), 使得对任

意 $n \in \mathbf{N}_+$, 均有 $a_{n+k} > a_n$, 符合定义;

当 n 为偶数时, $a_{n+k} - a_n = 2k + (-1)^k - 1$, 因为 $(-1)^k - 1 \geq -2$, 所以存在正整数 k ($k \geq 2$), 使得对任意 $n \in \mathbf{N}_+$, 均有 $a_{n+k} > a_n$, 符合定义, 故 B 正确.

对于 C, $a_{n+k} - a_n = \left(n+k + \frac{r}{n+k}\right) - \left(n + \frac{r}{n}\right) = k - \frac{kr}{(n+k)n} = k \left[1 - \frac{r}{(n+k)n}\right] = k \cdot \frac{n^2 + kn - r}{(n+k)n}$,

令 $f(n) = n^2 + kn - r$, 则二次函数的图象开口向上, 对称轴方程为 $n = -\frac{k}{2} < 0$,

所以 $f(n)$ 在 $n \in \mathbf{N}_+$ 时单调递增, 令最小值 $f(1) = 1 + k - r > 0$, 解得 $k > r - 1$,

又 $k \in \mathbf{N}_+, k \geq 2, r \in \mathbf{N}_+, r \geq 2$, 故存在 $k \geq r$ 时, $a_{n+k} - a_n > 0$, 符合定义, 且“间隔数”的最小值为 r , 故 C 正确.

对于 D, 因为 $\{a_n\}$ 是“间隔递增数列”, 所以 $a_{n+k} - a_n = [(n+k)^2 + t(n+k)] -$